ОТЛИЧНИК ЕГЭ

ФИПИ
Федеральный институт педагогических измерений

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

ФИЗИКА

РЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ФИПИ

ОТЛИЧНИК ЕГЭ

ФИЗИКА

Решение сложных задач

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

«Интеллект–Центр»
2010

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721
О-80

Авторы:
**Вишнякова Е. А., Макаров В. А., Семенов М. В.,
Черепецкая Е. Б., Чесноков С. С., Якута А. А.**

О-80 Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. Под ред. В. А. Макарова, М. В. Семенова, А. А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.

В пособии содержится более 600 задач, которые могут быть полезными для подготовки к выполнению заданий с развернутым ответом (части С) экзаменационной работы ЕГЭ по физике. В книгу вошли более 200 задач с подробными решениями и методическими рекомендациями, а также около 400 задач для самоподготовки (с ответами) по всем основным темам школьного курса физики. Пособие может также использоваться для подготовки школьников к участию в различных олимпиадах по физике.

Для школьных учителей, готовящих учеников к ЕГЭ по физике, школьников 10-х – 11-х классов, абитуриентов, руководителей школьных физических кружков, преподавателей заочных и вечерних физических школ и подготовительных курсов.

Вишнякова *Екатерина Анатольевна,* ***Макаров*** *Владимир Анатольевич,* ***Семенов*** *Михаил Владимирович,* ***Черепецкая*** *Елена Борисовна,* ***Чесноков*** *Сергей Сергеевич,* ***Якута*** *Алексей Александрович*

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М.Б. Миндюк
Редактор: Д.П. Локтионов
Технический редактор: В.С. Торгашова
Художественный редактор: Е.Ю. Воробьева

Подписано в печать 21.11.2009 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Печать Офсетная.
Усл. печ. л. 23,0. Тираж 5000 экз.

ISBN 978-5-89790-613-0

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для выпускников школ значительно расширились возможности выбора высшего учебного заведения для продолжения своего образования. Выпускники могут успешно сдать единые государственные экзамены (ЕГЭ) по ряду предметов, после чего подать заявления о зачислении сразу в несколько вузов. Также школьники имеют возможность участвовать в большом числе различных олимпиад. Это Всероссийские олимпиады школьников по различным предметам, проводимые Федеральным агентством по образованию, а также более 100 предметных и межпредметных олимпиад, проводимых под эгидой Российского союза ректоров органами государственной власти и высшими учебными заведениями. Победа в одной или в нескольких олимпиадах дает выпускнику возможность быть зачисленным в избранный им вуз без сдачи вступительных испытаний, либо получить значительные льготы при участии в конкурсе. Получение высокой оценки за экзаменационную работу ЕГЭ также практически гарантирует поступление в любое высшее учебное заведение.

Возможность подать заявления о зачислении сразу в несколько вузов делает проходной балл на первом этапе конкурсного отбора достаточно высоким. Естественное желание быть зачисленным в вуз как можно раньше может реализовать лишь тот абитуриент, который победил в одной или нескольких олимпиадах, или получил на единых государственных экзаменах весьма высокие оценки. Для этого необходимо не только изучить материал, изложенный в хорошо зарекомендовавших себя учебниках и сборниках задач по физике, но и уметь правильно выполнять задания с развернутым ответом (часть С) экзаменационной работы ЕГЭ. Настоящее пособие поможет выпускникам школы в подготовке к успешному решению заданий части С экзаменационной работы по физике.

На едином государственном экзамене по физике контролируются знания и умения из следующих разделов школьного курса физики.

1. «Механика» (кинематика, динамика, элементы статики, законы сохранения в механике, механические колебания и волны) – около 30% заданий экзаменационной работы.

2. «Молекулярная физика и термодинамика» (молекулярно-кинетическая теория, термодинамика, свойства паров, жидкостей и твердых тел) – около 25% заданий экзаменационной работы.

3. «Электродинамика» (электростатика, законы постоянного тока, электрический ток в различных средах, магнитное поле, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны, оптика, основы специальной теории относительности) – около 30% заданий экзаменационной работы.

4. «Квантовая физика» (корпускулярно-волновой дуализм, физика атома, физика атомного ядра) – около 15% заданий экзаменационной работы.

Предполагается, что экзаменующиеся имеют необходимые представления о применении в физике методов научного познания (о наблюдении и описании физических явлений, моделировании явлений и объектов природы, построении научных гипотез, роли физического эксперимента, измерении физических величин, формулировке физических законов и теорий и установлении границ их применимости).

Экзаменационная работа состоит из трех частей. Первая часть (часть А) – это задания с выбором ответа (к каждому заданию приводится 4 варианта ответа, из которых верен только один). Вторая часть (часть В) содержит задания с кратким ответом (ответ представляется в виде числа, либо в виде указания соответствия между позициями вопроса и ответа). Наконец, третья часть (часть С) включает задания с развернутым ответом.

Экзаменационная работа может включать в себя от 35 до 40 заданий, из них на часть С обычно приходится 5–6 заданий. Общее количество заданий в экзаменационной работе по каждому из разделов приблизительно пропорционально его содержательному наполнению и учебному времени, отводимому на изучение данного раздела в школьном курсе физики. При этом задания части С являются заданиями высокого уровня сложности и проверяют умение использовать физические теории и законы в измененной или новой ситуации. Эти задания также позволяют проверить навыки комплексного использования знаний и умений из различных разделов курса физики. По этой причине выполнение таких заданий требует применения знаний сразу из двух-трех разделов физики, т.е. довольно высокого уровня подготовки. Задания части С играют важную роль в структуре контрольной работы ЕГЭ. Они в основном отражают уровень требований к вступительным испытаниям при поступлении на технические и физико-математические специальности большинства вузов нашей страны. Таким образом, включение в часть С сложных заданий разного уровня трудности позволяет дифференцировать абитуриентов при их дальнейшем отборе в вузы с различными требованиями к уровню подготовки поступающих.

Задания в части С группируются в соответствии с их тематической принадлежностью (от раздела «Механика» к разделу «Квантовая физика»). На решение этих заданий отводится около 2 астрономических часов (то есть в среднем около 20 минут на каждое задание). Так как на выполнение всей экзаменационной работы выделяется 3,5 астрономических часа, то процесс решения и оформления заданий части С занимает примерно 50% общего времени написания экзаменационной работы. В экзаменационном варианте перед заданиями части С предлагается инструкция, в которой приведены общие требования к оформлению развернутых решений. При выполнении заданий разрешается использовать линейку, а также непрограммируемый микрокалькулятор с возможностью вычисления тригонометрических функций.

За каждое правильно решенное задание части С экзаменующийся может получить 3 первичных балла, то есть всего за выполнение заданий части С можно получить 15–18 первичных баллов. Поскольку максимальное количество первичных баллов, на которое может быть оценена экзаменационная работа, равно 50, то баллы, полученные за задания части С, составляют 30–35% от максимально возможной суммы первичных баллов. Таким образом, задания части С играют значительную роль в контрольной работе ЕГЭ по физике – получение высокой итоговой оценки за экзамен без решения хотя бы нескольких заданий части С невозможно.

После проведения экзамена Рособрнадзором устанавливается минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение выпускником программы среднего (полного) общего образования по физике. Это минимальное число баллов определяется объемом знаний и умений, без которых в дальнейшем невозможно продолжение образования в учреждениях среднего профессионального и высшего профессионального образования.

При подготовке к ЕГЭ по физике рекомендуется использовать учебники, имеющие гриф Министерства образования и науки РФ, пособия, включенные в перечень учебных изданий, допущенных Министерством образования и науки РФ, а также пособия, рекомендованные Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ) для подготовки к единому государственному экзамену. Список некоторых таких изданий, вышедших к настоящему времени, приведен в конце данной книги.

Настоящее пособие состоит из четырех основных разделов, соответствующих основным разделам школьного курса физики. Внутри каждого раздела выделено несколько подразделов: в разделе «Механика» – пять, в разделе «Молекулярная физика и термодинамика» – два, в разделе «Электродинамика» – шесть, в разделе «Квантовая физика» – три. В каждом из подразделов приведены задачи с подробными решениями, а также задачи с ответами, предназначенные для самостоятельной подготовки. При этом решения первых трех задач в каждом подразделе написаны практически в строгом соответствии с требованиями, предъявляемыми экспертами при проверке решений заданий части С экзаменационной работы. Решения остальных задач в целом соответствуют этим требованиям (с целью сокращения объема пособия не везде упомянуто об используемых стандартных модельных предположениях, а также опущены промежуточные выкладки, числовые расчеты и проверка размерностей полученных ответов – эти операции читателям рекомендуется воспроизвести самостоятельно). В конце каждого решения приведены краткие методические рекомендации, которые могут представлять собой указание на возможность применения в данном случае тех или иных физических законов или формул, пояснения по поводу использованных в решении математических приемов, описание ошибок, часто встречающихся при решении задач данного вида. Для того чтобы получить представление о требованиях, предъявляемых к решениям заданий части С, рекомендуется перед началом работы с пособием ознакомиться с приведенной ниже методикой оценивания решения заданий с развернутым ответом в экзаменационных работах ЕГЭ по физике.

Пособие содержит более 600 задач (более 200 – с решениями и около 400 – с ответами). Большинство из вошедших в пособие задач в течение ряда лет использовались в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова в качестве заданий для различных олимпиад школьников по физике, а также при проведении устных и письменных вступительных испытаний на физический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики и факультет наук о материалах. Кроме того, в сборник вошло более 80 задач, которые использовались в качестве заданий экзаменационных работ ЕГЭ по физике прошлых лет (номера таких задач снабжены надстрочным индексом «Е» – например: **1.1.7.**$^{\mathrm{E}}$). Многие задачи из числа приведенных в сборнике давно стали классическими; а большинство задач являются в значительной степени оригинальными. Приведённые в настоящем сборнике условия задач были отредактированы, а решения и методические рекомендации – написаны или отредактированы авторами данной книги.

При работе над данным пособием авторы опирались на многолетние традиции преподавания физики, имеющиеся в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также на богатый педагогический опыт, накопленный многими поколениями замечательных ученых и педагогов, работавших ранее и продолжающих работать в настоящее время на физическом факультете МГУ. Многие из них известны как авторы классических учебников по физике для школы, средних специальных и высших профессиональных учебных заведений, а также как выдающиеся популяризаторы науки. Авторы считают своим долгом упомянуть здесь ряд педагогов физического факультета МГУ, лекции и книги которых открыли удивительный мир физики многим поколениям школьников и студентов: это А. И. Буздин, Г. А. Бендриков, Б. Б. Буховцев, В. И. Григорьев, В. Г. Зубов, В. А. Ильин, В. И. Иверонова, С. Г. Калашников, В. В. Керженцев, В. Д. Кривченков, И. В. Кривченков, С. С. Кротов, Г. С. Ландсберг, А. Б. Млодзеевский, А. Н. Матвеев, Г. Я. Мякишев, В. К. Петерсон, Г. Е. Пустовалов, Б. И. Спасский, Н. А. Свешников, С. П. Стрелков, К. Ф. Теодорчик, С. Э. Хайкин, В. П. Шальнов, М. П. Шаскольская, И. А. Эльцин, И. А. Яковлев.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность профессорам и преподавателям физического факультета МГУ, которые своими ценными советами и замечаниями, высказанными в ходе многочисленных обсуждений, способствовали значительному улучшению материала, использованного при подготовке данной книги. Мы благодарим В. А. Алешкевича, П. Ю. Бокова, В. М. Буханова, А. В. Грачева, А. И. Гомонову, В. А. Грибова, К. Н. Драбовича, В. Ю. Иванова, Ю. А. Кокшарова, Г. А. Миронову, С. Ю. Никитина, В. И. Николаева, И. П. Николаева, К. В. Парфёнова, В. А. Погожева, Н. Б. Подымову, М. С. Полякову, И. М. Сараеву, А. В. Селиверстова, Ю. В. Старокурова, В. С. Степанову, Н. И. Чистякову, В. И. Шмальгаузена и многих других.

Авторы также признательны руководству физического факультета МГУ, которое постоянно уделяло и уделяет большое внимание вопросам преподавания физики школьникам. Усилиями деканов факультета профессоров В. С. Фурсова, А. П. Сухорукова, В. И. Трухина, а также профессоров Ю. Г. Пыркина, П. В. Короленко, В. А. Твердислова и доцентов А. И. Соколова, Н. А. Сухаревой, В. Н. Аксенова, в различные годы занимавших должности заместителей декана по учебной работе, в МГУ сформировался высокий уровень требований к задачам для олимпиад и вступительных испытаний по физике, задавший «высокую планку» при конкурсном отборе абитуриентов в высшие учебные заведения страны.

Авторы благодарны рецензенту настоящего пособия – доценту физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова к.ф.-м.н. Г.А. Чижову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, учет которых позволил улучшить структуру и содержание книги.

Пособие предназначено для школьных учителей физики, готовящих своих учеников к сдаче единого государственного экзамена по физике, а также учеников 10-х –11-х классов, которые желают углубить свои знания в области физики и подготовиться к сдаче ЕГЭ. Оно также может быть полезно абитуриентам, окончившим школу в прошлые годы и готовящимся сдавать или пересдавать ЕГЭ, руководителям школьных физических кружков, преподавателям заочных и вечерних физико-математических школ и подготовительных курсов. Пособие также может использоваться для подготовки к участию в различных олимпиадах школьников.

Авторы будут признательны за любые конструктивные замечания по содержанию пособия и за сообщения об обнаруженных опечатках, которые можно присылать по электронной почте aa.yakuta@physics.msu.ru. С перечнем опечаток, обнаруженных авторами и читателями после сдачи пособия в печать, можно ознакомиться в сети Internet на странице http://genphys.phys.msu.ru/ol/egebook

МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ В ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТАХ ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

Полное правильное решение задачи с развернутым ответом (задание части С) должно включать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и, при необходимости, рисунок, поясняющий решение. За решение каждой задачи можно получить от 0 до 3 первичных баллов. При оценивании решений заданий части С в экзаменационных работах выпускников, как правило, применяются следующие основные критерии.

3 первичных балла ставится в случае, если приведено полное правильное решение задачи, одновременно включающее следующие элементы:

– верно записаны формулы, выражающие физические законы, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом;

– проведены необходимые математические преобразования и расчеты, приводящие к правильному числовому ответу, и представлен ответ. При этом допускается решение «по частям» (с проведением промежуточных вычислений).

2 первичных балла ставится в случае, если выполнено хотя бы одно из следующих требований:

– представлено правильное решение задачи только в общем виде, без каких-либо числовых расчетов;

– или правильно записаны необходимые для решения задачи формулы, записан правильный ответ, но не представлены преобразования, приводящие к ответу;

– или правильно записаны необходимые для решения задачи формулы, но в математических преобразованиях или вычислениях допущена ошибка, которая привела к неверному числовому ответу.

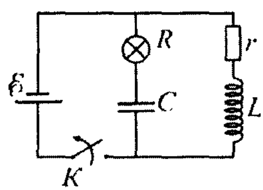
1 первичный балл ставится в случае, если
- в решении содержится ошибка в необходимых математических преобразованиях и отсутствуют какие-либо числовые расчеты;
- записаны все исходные формулы, необходимые для решения задачи, но в одной (только в одной!) из них допущена ошибка;
- отсутствует одна из формул, необходимых для решения задачи.

Во всех остальных случаях решения задачи, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2 или 3 первичных балла (использование неприменимого физического закона, отсутствие более чем одного исходного уравнения, разрозненные записи и т.п.) ставится 0 первичных баллов.

Критерии оценивания решений заданий части С в экзаменационных работах ежегодно уточняются и конкретизируются. С критериями, действующими в данном учебном году, можно ознакомиться, обратившись к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов ЕГЭ по физике (КИМ), ежегодно публикующемуся на официальном Интернет-сайте Федерального института педагогических измерений (www.fipi.ru).

Приведем пример задачи с развернутым ответом, содержавшейся в демонстрационном варианте единого государственного экзамена 2009 года, за решение которой может быть поставлено 3 первичных балла.

Задача



В электрической цепи, показанной на рисунке, ЭДС источника тока равна $\mathcal{E} = 12$ В, емкость конденсатора $C = 2$ мФ, индуктивность катушки $L = 5$ мГн, сопротивление лампы $R = 5$ Ом и сопротивление резистора $r = 3$ Ом. В начальный момент времени ключ K замкнут. Какая энергия выделится в лампе после размыкания ключа? Внутренним сопротивлением источника тока, а также сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

Решение. При замкнутом в течение достаточно долгого времени ключе в цепи устанавливается ток через источник, сопротивление r и катушку, величина которого, согласно закону Ома для полной цепи, равна: $I = \mathcal{E}/r$. Напряжение на конденсаторе U при этом равно ЭДС источника: $U = \mathcal{E}$. Полная энергия, запасенная в системе, складывается из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки: $W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. После размыкания ключа K в контуре, состоящем из катушки, конденсатора, резистора и лампы, возникнут затухающие электромагнитные колебания. В процессе этих колебаний, согласно закону сохранения энергии, вся начальная энергия, запасенная в колебательном контуре, перейдет в теплоту, выделяющуюся в резисторе сопротивлением r и в лампе сопротивлением R:

$$W = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{L}{r^2} + C\right) = Q_r + Q_R.$$

Согласно закону Джоуля – Ленца, мощность N, выделяющаяся в проводнике, пропорциональна сопротивлению проводника и квадрату силы тока, текущего через него в данный момент времени. Поскольку через резистор и лампу течет один и тот же ток, то $N_r = I^2 r$ и $N_R = I^2 R$ (I – мгновенное значение силы тока). Поэтому $N_r / N_R = r/R$, причем это отношение не зависит от времени. Значит, такое же отношение справедливо и для количеств теплоты, выделяющихся в резисторах за полное время затухания колебаний в контуре. Отсюда $Q_r / Q_R = r/R$. Следовательно $Q_R\left(\frac{r}{R} + 1\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{L}{r^2} + C\right)$, откуда $Q_R = \frac{R\mathcal{E}^2}{2(r+R)}\left(C + \frac{L}{r^2}\right) =$

$$= \frac{5\ \text{Ом} \cdot (12\ \text{В})^2}{2 \cdot (3\ \text{Ом} + 5\ \text{Ом})}\left(2 \cdot 10^{-3}\ \text{Ф} + \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн}}{(3\ \text{Ом})^2}\right) = 0{,}115\ \text{Дж}.$$

Проверим размерность получившегося ответа:

$$[Q_R]=\frac{\text{Ом}\cdot\text{В}^2}{\text{Ом}}\cdot\left(\text{Ф}+\frac{\text{Гн}}{\text{Ом}^2}\right)=\text{В}^2\cdot\left(\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}}\right)=\text{Дж}\,.$$

Выделим важные этапы решения, выполнение которых позволяет поставить за него максимальный первичный балл.

1) При помощи закона Ома для полной цепи найдена сила тока, текущего через катушку.

2) Найдена полная начальная энергия, запасенная в конденсаторе и в катушке.

3) Применен закон сохранения энергии для процессов, происходящих в колебательном контуре после размыкания ключа.

4) Применен закон Джоуля – Ленца для отыскания соотношения между количествами теплоты, выделяющимися в резисторе и в лампе.

5) Названы все примененные физические законы.

6) Сделаны числовые расчеты и получен правильный ответ.

7) Проверена размерность полученного ответа.

Еще раз отметим, что при записи решения задачи с развернутым ответом для получения максимального первичного балла обязательно нужно указывать наименования используемых физических законов, а в завершение решения проводить числовые расчеты.

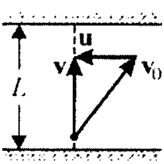
1. МЕХАНИКА

1.1. КИНЕМАТИКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

1.1.1. Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?

Решение. Для решения задачи воспользуемся неподвижной системой отсчета, связанной с берегом реки. Согласно закону сложения скоростей, скорость $\mathbf{v}$ пловца относительно этой системы отсчета равна векторной сумме его скорости $\mathbf{v}_0$ относительно воды и скорости течения реки $\mathbf{u}$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$.



В первом случае, когда пловец пересекает реку по прямой, перпендикулярной берегу, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, и векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{u}$ образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок). Следовательно, в этом случае $v = \sqrt{v_0^2 - u^2}$, и время, за которое пловец переплывает реку туда и обратно, равно $t_1 = \dfrac{2L}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}$.

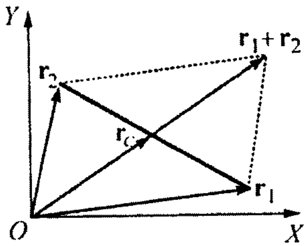
Во втором случае, когда пловец плывет вдоль берега, его скорость в неподвижной системе отсчета равна $v_1 = v_0 + u$ при движении по течению и $v_2 = v_0 - u$ при движении против течения. Следовательно, время, которое пловец затрачивает для того, чтобы проплыть вдоль берега расстояние L и вернуться обратно, равно $t_2 = \dfrac{L}{v_0 + u} + \dfrac{L}{v_0 - u} = \dfrac{2Lv_0}{v_0^2 - u^2}$.

Разрешая полученную систему уравнений, находим: $v_0 = \dfrac{2Lt_2}{t_1^2}$, $u = \dfrac{2L}{t_1^2}\sqrt{t_2^2 - t_1^2}$. Отсюда $\alpha = \dfrac{v_0}{u} = \dfrac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \dfrac{5}{3}$.

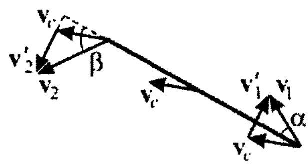
При решении подобных задач следует сначала определить скорость пловца *относительно неподвижной системы отсчета.* Основной ошибкой в таких задачах, как правило, является неправильное векторное сложение скоростей.

1.1.2. Стержень длиной $l = 0{,}85$ м движется в горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости концов стержня равны $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 1{,}5$ м/с, причем скорость первого из них направлена под углом $\alpha = 30°$ к стержню. Какова в этот момент времени угловая скорость ω вращения стержня вокруг его центра?

Решение. Для того чтобы найти скорость центра стержня относительно неподвижной системы отсчета, воспользуемся равенством $\mathbf{r}_c = \dfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, связывающим радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ концов стержня с радиус-вектором $\mathbf{r}_c$ его центра (см. рис. (*а*)).



(*а*)



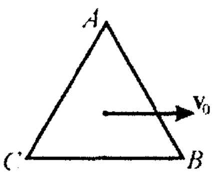
(*б*)

Дифференцируя это равенство по времени, находим, что в неподвижной системе отсчета скорость центра стержня равна $\mathbf{v}_c = \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Скорости концов стержня в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с его центром, по закону сложения скоростей выражаются следующим образом: $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_c = \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$, $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_c = \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ (см. рис. (*б*)).

Из постоянства длины стержня вытекает, что проекции скоростей его концов на направление стержня в каждый момент времени совпадают: $v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$. Поэтому $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ перпендикулярны стержню, причем $v'_1 = v'_2 = \omega \cdot \frac{l}{2}$. Следовательно, $\omega = \frac{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}{l} = \frac{v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta}{l}$. Учитывая, что $\cos\beta = \frac{v_1}{v_2}\cos\alpha$, получаем ответ: $\omega = \frac{1}{l}\left(v_1 \sin\alpha + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha} \right) \approx 2$ рад/с.

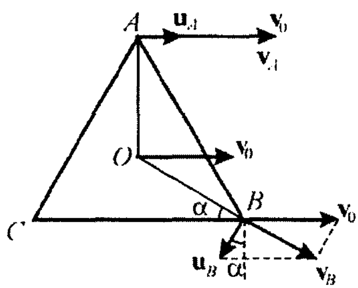
При решении подобных задач основные трудности вызывает векторное сложение скоростей. Будет полезным решить эту задачу в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с одним из концов стержня, и сравнить полученные ответы.

1.1.3. Равносторонний треугольник *ABC* скользит плашмя по горизонтальному столу. Известно, что в некоторый момент времени



точка *A* имеет скорость $v_1 = \sqrt{6}$ м/с $\approx 2{,}45$ м/с, точка *B* имеет скорость $v_2 = 1{,}5$ м/с, а скорость центра треугольника направлена параллельно стороне *CB*. Какова величина скорости v_0 центра треугольника в этот момент времени?

Решение. В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром треугольника, он совершает вращательное движение, причем скорости его вершин $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C$ относительно центра равны друг другу по величине ($u_A = u_B = u_C \equiv u$) и каждая из них перпендикулярна линии, проведенной к соответствующей



вершине из центра треугольника. Согласно закону сложения скоростей, скорости вершин *A* и *B* в неподвижной системе отсчета определяются векторными равенствами: $\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_A$, $\mathbf{v}_B \equiv \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_B$. Модули этих скоростей, как видно из рисунка, равны $v_1 = v_0 + u$,

$v_2=\sqrt{(u\cos\alpha)^2+(v_0-u\sin\alpha)^2}$, где $\alpha=30°$. Из последнего равенства находим $v_2^2=v_0^2+u^2-2uv_0\sin\alpha=v_0^2+u^2-uv_0$. Подставляя в эту формулу выражение $u=v_1-v_0$, получим уравнение относительно v_0: $v_0^2-v_1v_0+\frac{1}{3}\left(v_1^2-v_2^2\right)=0$. Корни этого уравнения $v_0=\frac{v_1\pm\sqrt{(4v_2^2-v_1^2)/3}}{2}=\frac{\sqrt{6}\pm1}{2}$ м/с дают два значения скорости центра треугольника, удовлетворяющие условию задачи: $v_{01}\approx1{,}72$ м/с, $v_{02}\approx0{,}72$ м/с.

Данная задача является классическим примером задач на сложение поступательного и вращательного движений. Читателю предлагается задуматься о том, в чем состоит физический смысл двух ответов. В качестве дополнительного упражнения предлагается определить скорость точки C.

1.1.4. Узнав о готовящемся нападении неприятеля, решетку ворот замка начали опускать с постоянной скоростью $u=0{,}2$ м/с. Мальчик, игравший на расстоянии $l=20$ м от ворот, в тот же момент бросился бежать к воротам. Сначала он двигался равноускоренно, а затем, набрав максимальную скорость $v_0=2{,}5$ м/с, равномерно. С каким минимальным ускорением $a_{\min}$ мог разгоняться мальчик, чтобы успеть пробежать под решеткой ворот в полный рост, если в начальный момент нижний край решетки находился на расстоянии $H=3$ м от поверхности земли? Рост мальчика $h=1$ м.

Решение. Пусть ускорение мальчика равно a. Тогда за время разгона $t_1=\frac{v_0}{a}$ он пробежит расстояние $s=\frac{at_1^2}{2}=\frac{v_0^2}{2a}$. Полное время движения мальчика до ворот равно $t_0=t_1+\frac{l-s}{v_0}=\frac{v_0}{2a}+\frac{l}{v_0}$.

Видно, что чем меньше ускорение мальчика на участке разгона, тем больше t_0. С другой стороны, для того чтобы мальчик успел пробежать под решеткой ворот в полный рост, t_0 не должно превышать времени τ движения решетки ворот от исходного положения до высоты, равной росту мальчика. Очевидно, что *ускорение* мальчика *будет минимальным*, если $t_0 = \tau$. Учитывая, что $\tau = \dfrac{H-h}{u}$, получаем ответ: $a_{\min} = \dfrac{v_0}{2\left(\dfrac{H-h}{u} - \dfrac{l}{v_0}\right)} = 0{,}625$ м/с^2.

На примере разобранной задачи следует обратить особое внимание на дополнительные условия в формулировке задачи, в данном случае, определение минимального ускорения мальчика.

1.1.5. В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1 = 9$ с, а $t_2 = 8$ с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

Решение. Пусть l – длина вагона, a – ускорение поезда. В момент, когда пассажир вышел на перрон, перемещение поезда составило величину $x_1 = a\tau^2/2$. За время $\tau + t_1$ поезд переместился на расстояние $x_2 = a(\tau + t_1)^2/2$. Следовательно, для предпоследнего вагона можно записать: $l = x_2 - x_1 = \dfrac{a(\tau+t_1)^2}{2} - \dfrac{a\tau^2}{2}$. Аналогично, для последнего вагона: $l = \dfrac{a(\tau+t_1+t_2)^2}{2} - \dfrac{a(\tau+t_1)^2}{2} = \dfrac{at_2}{2}(2\tau + 2t_1 + t_2)$. Из этих соотношений вытекает равенство: $(\tau+t_1)^2 - \tau^2 = t_2(2\tau + 2t_1 + t_2)$. Выражая отсюда τ, получаем ответ: $\tau = \dfrac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 63{,}5$ с.

При решении этой задачи необходимо учитывать перемещение поезда в тот момент, когда пассажир вышел на перрон – именно время, за которое произошло это перемещение, и есть время, на которое пассажир опоздал к отходу поезда.

1.1.6. Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d = 1$ м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость $v_0 = 8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличаются времена разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

Решение. Время, за которое бегун пробегает дистанцию, равно $\tau = t_p + t_0$, где $t_p = \dfrac{v_0}{a}$ – время разгона, t_0 – время движения с постоянной скоростью, a – ускорение бегуна. Из зависимости координаты точки от времени при равноускоренном движении получим время разгона, за которое бегун пробегает расстояние $S_p = \dfrac{at_p^2}{2} = \dfrac{v_0^2}{2a}$. Поэтому $t_0 = \dfrac{S - S_p}{v_0} = \dfrac{S}{v_0} - \dfrac{v_0}{2a}$, где S – длина дистанции. Таким образом, $\tau = \dfrac{v_0}{2a} + \dfrac{S}{v_0}$. По условию задачи $\tau_1 = \tau_2$, откуда следует, что $\dfrac{v_0}{2a_1} + \dfrac{S_1}{v_0} = \dfrac{v_0}{2a_2} + \dfrac{S_2}{v_0}$, или $\dfrac{t_{p1}}{2} + \dfrac{S_1}{v_0} = \dfrac{t_{p2}}{2} + \dfrac{S_2}{v_0}$ (индексы относятся к обоим бегунам). Отсюда $\Delta t = t_{p1} - t_{p2} = \dfrac{2(S_2 - S_1)}{v_0}$. Разность длин дистанции $S_2 - S_1$ равна разности длин окружностей радиусами $R+d$ и R, т.е. $S_2 - S_1 = 2\pi d$. Отсюда $\Delta t = \dfrac{4\pi d}{v_0} \approx 1{,}57$ с.

Обратите внимание, что на первый взгляд число неизвестных величин больше, чем число уравнений. Однако, выразив одну неизвестную величину через другую (также неизвестную), мы приходим к правильному ответу.

1.1.7.[E] Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1$ с после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения.

Решение. Пусть тело падает в течение k секунд и проходит за первую секунду путь h. Тогда, в соответствии с законом прямолинейного равноускоренного движения, $h = \dfrac{g\tau^2}{2}$. К концу предпоследней $(k-1)$-й секунды тело имеет скорость $v = g(k-1)\tau$. За последнюю k-ю секунду тело проходит путь $nh = v\tau + \dfrac{g\tau^2}{2} = g(k-1)\tau^2 + \dfrac{g\tau^2}{2}$. Решая полученную систему уравнений, получим: $k = \dfrac{n+1}{2}$. Следовательно, искомое полное время движения $t = k\tau = \dfrac{n+1}{2}\tau = 3$ с.

Заметим, что при решении этой задачи удобно применить следующий прием: разбить полное время движения на интервалы, кратные одной секунде, и записывать закон движения для каждого из нужных интервалов по отдельности.

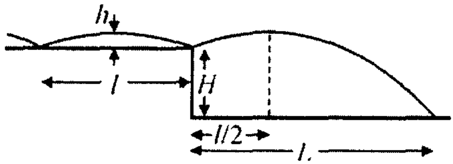
1.1.8. Легкий маленький шарик роняют с нулевой начальной скоростью. Когда шарик пролетает по вертикали расстояние $h = 5$ м, он ударяется о тяжелую горизонтальную доску, движущуюся вертикально вверх с постоянной скоростью. После упругого удара о доску шарик подлетает вверх на высоту nh от точки соударения, где $n = 4$. С какой скоростью u двигалась доска? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Скорость шарика, свободно падающего с высоты h, равна $v = \sqrt{2gh}$. Для того, чтобы шарик после удара о доску поднялся на высоту nh, он должен при ударе приобрести скорость $v' = \sqrt{2gnh} = v\sqrt{n}$, направленную вверх. В системе отсчета, связанной с доской, скорость шарика перед ударом $v_{\text{отн}} = v + u$. Так как удар упругий, шарик отскочит вверх с такой же по модулю скоростью относительно доски: $v'_{\text{отн}} = v + u$. По закону сложения скоростей скорость шарика после удара в неподвижной системе отсчета равна: $v' = v'_{\text{отн}} + u = v + 2u$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $u = \sqrt{\frac{gh}{2}}\left(\sqrt{n} - 1\right) = 5$ м/с.

Следует отметить, что эта задача, как правило, вызывает особые трудности: во-первых, в определении относительной скорости, и, во-вторых, при переходе от движущейся системы отсчета к неподвижной.

1.1.9. Преследуя добычу, гепард движется по прямой горизонтальной тропе прыжками длиной $l = 8$ м. Внезапно на пути гепарда встречается овраг глубиной $H = 4/3$ м. Отталкиваясь от края оврага точно так же, как и при движении по тропе, гепард прыгает в овраг. Найти горизонтальное перемещение гепарда L при этом прыжке, если горизонтальная составляющая его скорости $v = 108$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать, дно оврага считать горизонтальным.

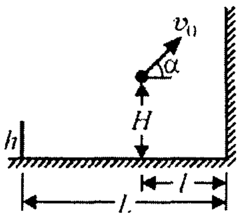
Решение. Длительность прыжка гепарда при движении по горизонтальной тропе равна $\tau = \frac{l}{v}$. Следовательно, высота прыжка над поверхностью тропы составляет $h = \frac{g(\tau/2)^2}{2} = \frac{gl^2}{8v^2}$.

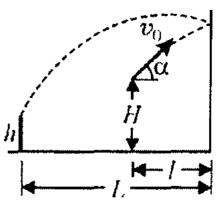


Горизонтальное смещение гепарда при прыжке в овраг равно (см. рисунок): $L=\frac{l}{2}+v\tau_1$, где $\tau_1=\sqrt{\frac{2(H+h)}{g}}$ – время свободного падения с высоты $(H+h)$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $L=\frac{l}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{8Hv^2}{gl^2}}\right)=20$ м.

При решении подобных задач полезно воспользоваться принципом независимости движений точки по двум взаимно перпендикулярным направлениям, который быстро приводит к правильному ответу.

1.1.10. Теннисист бьет мячом с высоты $H=2$ м в направлении вертикальной гладкой стенки, находящейся на расстоянии $l=2$ м от него. Начальная скорость мяча лежит в плоскости, перпендикулярной стенке, и направлена под углом $\alpha=45°$ к горизонту. Позади теннисиста на расстоянии $L=4$ м от стенки расположено параллельно ей ограждение высотой $h=1$ м. При какой максимальной начальной скорости мяча v_0 он после упругого удара о стенку не перелетит через ограждение? Размером мяча пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.





Решение. Траектория мяча, соответствующая максимальной скорости, удовлетворяющей условию задачи, изображена на рисунке. При упругом ударе о стенку вертикальная составляющая скорости мяча не изменяется, а горизонтальная, оставаясь той же по величине, меняет направление на противоположное. Зависимость высоты мяча над поверхностью земли от времени имеет вид: $y = H + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

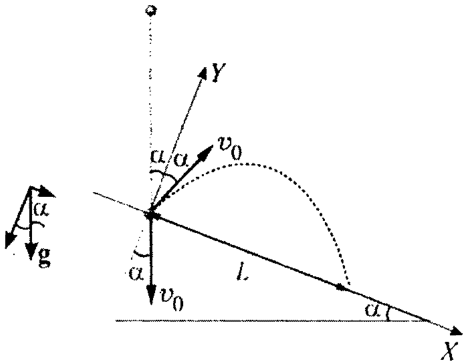
Время полета мяча до ограждения $t_0 = \frac{L+l}{v_0 \cos\alpha}$. Мяч не перелетит через ограждение, если $y(t_0) \le h$. Исключая из записанных выражений время, получаем ответ:

$$v_0 = \frac{L+l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\big((H-h)+(L+l)\operatorname{tg}\alpha\big)}} \approx 7{,}17 \text{ м/с}.$$

При решении подобных задач основные трудности связаны с изменением (в результате соударения о стенку) привычной траектории движения мяча, брошенного под углом к горизонту. Поэтому может оказаться полезным сделать чертеж, расположив ограждение на расстоянии (L+l) от точки бросания мяча, и изобразить на нем траекторию движения мяча.

1.1.11.[E] Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от неё. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика в момент первого удара направлена вертикально вниз и равна 1 м/с.

Решение. Направим оси прямоугольной декартовой системы координат так, как показано на рисунке: ось X вдоль наклонной плоскости вниз, а ось Y – перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Начало координат совместим с точкой, в которой шарик в первый раз соударяется с плоскостью. Так как этот удар абсолютно упругий, то после него скорость шарика сохраняет свой модуль, равный $v_0 = 1$ м/с. При абсолютно упругом соударении проекция скорости шарика на наклонную плоскость остается неизменной, а проекция скорости шарика на нормаль к наклонной плоскости изменяет свой знак на противоположный. Поэтому сразу после первого удара вектор скорости шарика направлен под

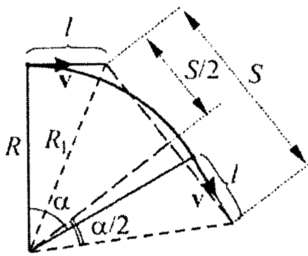


углом $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ к горизонту, то есть под углом α к оси Y (угол $\alpha = 30°$). Вектор ускорения свободного падения **g** имеет проекции на оси X и Y, равные $g\sin\alpha$ и $g\cos\alpha$, соответственно.

Запишем закон равноускоренного движения шарика (в промежутке между первым и вторым ударами) в проекциях на оси X и Y: $x(t)=v_0\sin\alpha\cdot t+\frac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2}$ и $y(t)=v_0\cos\alpha\cdot t-\frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}$. Пусть через время $t=\tau$ после первого соударения шарик ударится о наклонную плоскость во второй раз. В этот момент времени координата y шарика обратится в ноль, то есть $y(\tau)=v_0\cos\alpha\cdot\tau-\frac{g\cos\alpha\cdot\tau^2}{2}=0$. Отсюда $\tau=\frac{2v_0}{g}$. За это время шарик сместится вдоль оси X (то есть вдоль наклонной плоскости) на расстояние $L=x(\tau)=v_0\sin\alpha\cdot\tau+\frac{g\sin\alpha\cdot\tau^2}{2}=\frac{4v_0^2\sin\alpha}{g}$. При этом перемещение шарика по горизонтали составит $S=L\cos\alpha=\frac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. Считая, что ускорение свободного падения $g\approx 10$ м/с^2, получим численный ответ: $S\approx 0{,}17$ м = 17 см.

При решении этой задачи большую роль играет удачный выбор направления осей прямоугольной системы координат. Выбор, сделанный в приведенном решении, заметно упрощает формулы, необходимые для получения ответа. Если же направить оси системы координат традиционным способом – горизонтально и вертикально – то решение задачи заметно усложнится, так как исходные формулы и вычисления станут гораздо сложнее.

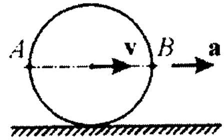
1.1.12. Самолет летит по дуге окружности радиусом $R = 1$ км, сохраняя одну и ту же высоту $h = 1{,}5$ км. С интервалом времени $\tau = 10{,}5$ с ($\approx 10\pi/3$ с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии S друг от друга упадут на землю эти мешки, если скорость самолета $v = 100$ м/с? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. На рисунке изображен вид сверху на траекторию самолета. Горизонтальное перемещение мешка за время падения с высоты h равно $l = v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Следовательно, расстояние от места падения мешка до центра проекции на поверхность земли окружности, по которой движется самолет, $R_1 = \sqrt{R^2 + l^2}$. Из рисунка видно, что $S = 2R_1 \sin\dfrac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \dfrac{v\tau}{R}$. Объединяя записанные выражения, находим ответ:

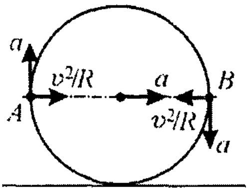
$$S = 2\sqrt{R^2 + \frac{2hv^2}{g}}\sin\left(\frac{v\tau}{2R}\right) \cong 2 \text{ км}.$$

При решении этой задачи надо понимать, что движение сброшенных мешков аналогично движению тела, брошенного горизонтально. Кроме того, при определении расстояния S и угла α требуются элементарные знания геометрии.



1.1.13. Колесо радиусом $R = 1$ м катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с ускорением $a = 4$ м/с^2. Какие по модулю ускорения относительно неподвижной системы отсчета имеют точки A и B, расположенные на горизонтальном диаметре колеса в тот момент, когда скорость центра колеса равна $v = 1$ м/с?

Решение. В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром колеса, все точки на ободе движутся по окружности радиусом R. Так как качение колеса происходит без проскальзывания, то модуль тангенциального ускорения точек на ободе $a_\tau = a$, а модуль нормального ускорения этих точек $a_n = v^2 / R$. При переходе к неподвижной системе отсчета к вектору ускорения каждой точки нужно прибавить вектор ускорения центра колеса. В результате для точек A и B получаем:



$$a_A = \sqrt{a^2 + \left(a + \frac{v^2}{R}\right)^2} \approx 6{,}4 \text{ м/с}^2 \text{ и } a_B = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{v^2}{R}\right)^2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Обратите внимание на определение нормального и тангенциального ускорений в системе отсчета, связанной с центром колеса. Было бы полезным решить задачу при условии движения колеса с постоянной скоростью.

Задачи для самостоятельного решения

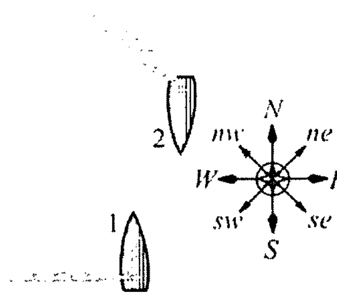
1.1.14. Эскалатор метро движется со скоростью $v = 1$ м/с. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на одну ступеньку вперёд и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время $t = 70$ с. Через какое время пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шёл другим способом: делал два шага вперёд и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперёд и назад одинакова и равна $u = 0{,}5$ м/с. Считайте, что размеры ступеньки много меньше длины эскалатора.

Ответ: $t_1 = \dfrac{3v - u}{3v + u} t = 50$ с.

1.1.15. По двум пересекающимся под углом $\alpha = 30°$ дорогам движутся к перекрестку два автомобиля: один со скоростью $v_1 = 10$ м/с, второй – со скоростью $v_2 = 17{,}3$ м/с. Когда расстояние между автомобилями было минимальным, первый из них находился на расстоянии $S_1 = 200$ м от перекрестка. На каком расстоянии S_2 от перекрестка в этот момент находился второй автомобиль?

Ответ: $S_2 = \dfrac{S_1(v_2\cos\alpha - v_1)}{v_2 - v_1\cos\alpha} = 115{,}3$ м.

1.1.16. Один корабль идёт по морю на север с постоянной скоростью 20 узлов, а другой – навстречу ему, на юг, с такой же скоростью. Корабли проходят на очень малом расстоянии друг от друга. Шлейф дыма от первого корабля вытянулся в направлении на запад, а от второго – на северо-запад (см. рисунок). Определите модуль v скорости ветра. 1 узел = 1 морская миля в час, 1 морская миля = 1852 м. Ответ выразите в км/ч и округлите до целого числа.



Ответ: $v \approx 83$ км/ч.

1.1.17. Стержень скользит по инерции по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент времени в неподвижной системе отсчета скорости концов стержня составляют с направлением стержня углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. Какой угол γ образует со стержнем в этот момент скорость его центра?

Ответ: $\gamma = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)\right) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \approx 49°$.

1.1.18.[E] За время $t = 2$ с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло путь $S = 20$ м, увеличив свою скорость в $n = 3$ раза. Определите конечную скорость тела.

Ответ: $v_к = \dfrac{2nS}{(n+1)t} = 15$ м/с.

1.1.19.[E] Мимо остановки по прямой улице проезжает грузовик со скоростью 10 м/с. Через 5 с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением 3 м/с^2. На каком расстоянии S от остановки мотоциклист догонит грузовик?

Ответ: $S = 150$ м.

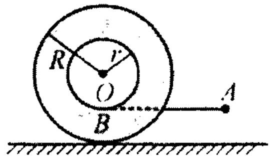
1.1.20. Пассажир, стоящий на перроне, заметил, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него в течение $t_1 = 4$ с, а второй – в течение $t_2 = 5$ с. Определить ускорение поезда a, если передний конец поезда остановился на расстоянии $L = 75$ м от пассажира. Движение поезда считать равнозамедленным.

Ответ: $a = \dfrac{8L(t_2 - t_1)^2}{(2t_1t_2 + t_2^2 - t_1^2)^2} \approx 0{,}25$ м/с^2.

1.1.21. Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d = 1$ м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость $v_0 = 8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают каждый по середине своей дорожки оставшуюся часть дистанции, финишируя одновременно. Чему равно отношение n времени разгона второго бегуна ко времени разгона первого, если полная длина первой дорожки $S_1 = 400$ м, а время, за которое спортсмены пробегают всю дистанцию, $\tau = 52$ с?

Ответ: $n = 1 - \dfrac{2\pi d}{v_0\tau - S_1} \approx 0{,}61$.

1.1.22. На цилиндрическую часть катушки радиусом $r = 10$ см, лежащей на столе, намотана легкая нерастяжимая нить, отрезок AB которой горизонтален (см. рисунок). В момент времени $t = 0$ точку нити A начинают тянуть с постоянным горизонтальным ускорением $\boldsymbol{a}$, модуль которого равен 4 см/с^2. При этом катушка начинает двигаться без проскальзывания так, что ее ось не изменяет своей ориентации. Через какое время τ длина горизонтального участка нити изменится в $n = 2$ раза, если длина отрезка AB была равна $L_0 = 1$ м, а внешний радиус катушки равен $R = 20$ см?



Ответ: $\tau = \sqrt{\dfrac{2L_0(n-1)(R-r)}{anr}} = 5$ с.

1.1.23. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19{,}6$ м/с^2. Какое время t_0 падала ракета с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau = 1$ мин?

Ответ: $t_0 = \dfrac{\tau}{g}\sqrt{a(a+g)} = 2{,}45$ мин.

1.1.24. Ракета запущена вертикально вверх и во время работы двигателя имела постоянное ускорение $a = 5g$. Спустя $t_0 = 1$ мин после старта двигатель ракеты отключился. Через какое время τ после отключения двигателя ракета упала на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $\tau = \left(\dfrac{a}{g} + \sqrt{\dfrac{a}{g}\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)}\right)t_0 = 630\ \text{с} \approx 10{,}5$ мин.

1.1.25. Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Когда плита находилась на расстоянии $h = 4$ м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени τ между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Толщиной плиты по сравнению с h пренебречь.

Ответ: $t_2 - t_1 = \dfrac{h}{v} - \dfrac{v}{g}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v^2}} - 1\right) = 3{,}2$ с.

1.1.26. На пол кабины лифта, движущегося вертикально вверх с постоянной скоростью, падает вертикально вниз упругий шарик. Определить скорость лифта, если после каждого удара шарик, не касаясь потолка, удаляется от пола лифта на максимальное расстояние за время $\tau = 0{,}6$ с, а за время между двумя последовательными ударами о пол проходит путь $L = 4$ м относительно земли.

Ответ: $u = \sqrt{(L - g\tau^2)g} = 2$ м/с, решение существует при $L > g\tau^2$.

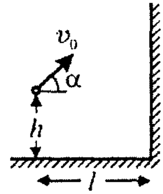
1.1.27.[E] Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю через время $t = 2$ с на расстоянии $s = 20$ м от места броска. Чему равна минимальная скорость камня за время полёта?

Ответ: $v_{\text{мин}} = \dfrac{s}{t} = 10$ м/с.

1.1.28. Из одной точки одновременно брошены два маленьких камушка с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с под углами $\alpha = 30°$ и 2α к горизонту. Камушки смещаются в горизонтальном направлении в одну сторону и в течение полета все время находятся в одной вертикальной плоскости. Найти расстояние между камушками спустя время $\tau = 0{,}5$ с после начала полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

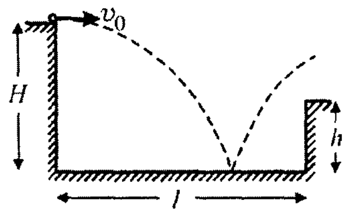
Ответ: $s = 2v_0\tau\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx 2{,}6$ м.

1.1.29. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Расстояние от мальчика до стены $l = 6$ м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



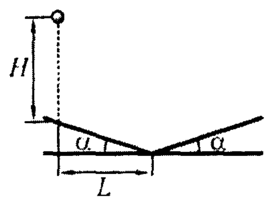
Ответ: $v_0 = \dfrac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \approx 10{,}3$ м/с.

1.1.30. С края бетонированного желоба, сечение которого изображено на рисунке, бросают в горизонтальном направлении маленький шарик. Какие значения может иметь модуль начальной скорости шарика v_0 для того, чтобы он, ударившись один раз о дно желоба, выпрыгнул на его противоположную сторону? При расчетах положить $H = 0{,}9$ м, $h = 0{,}5$ м, $l = 2$ м. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Удар шарика о дно желоба считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь.



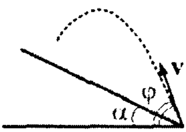
Ответ: $\dfrac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} + \sqrt{H-h}\right)} \le v_0 \le \dfrac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right)}$, или $1{,}75$ м/с $\le v_0 \le 3{,}5$ м/с.

1.1.31. Маленький шарик падает с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты H на наклонную плоскость. После удара он попадает на вторую плоскость. Точка первого удара находится на расстоянии $L = 1{,}73$ м от линии соприкосновения плоскостей (см. рисунок). С какой высоты H упал шарик, если после двух упругих ударов он снова поднялся на ту же высоту? Угол наклона плоскостей к горизонту равен $\alpha = 15°$.



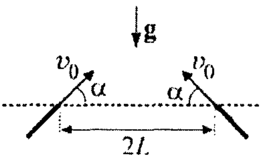
Ответ: $H = \dfrac{L}{\sin 4\alpha} \approx 2$ м.

1.1.32. Из некоторой точки плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, бросают упругий шарик, как показано на рисунке. Знаая, что место второго удара шарика о плоскость находится выше места его первого удара, найти возможные значения угла φ бросания этого шарика относительно горизонта.



Ответ: $\alpha < \varphi < \alpha + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3\operatorname{tg}\alpha}\right)$, т.е. $30° < \varphi < 60°$.

1.1.33. Из двух тонких труб установленных в одной вертикальной плоскости, как показано на рисунке, вытекает вода со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Выходные отверстия труб находятся на одной горизонтали. Расстояние между выходными отверстиями труб равно $2L = 3$ м. При каком значении угла α точка пересечения струй воды будет находиться на максимально возможной высоте над уровнем выходных отверстий труб? Влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

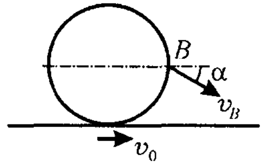


Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v_0^2}{gL} \approx 60°$.

1.1.34. У мальчика, сидящего на расстоянии $R = 3$ м от оси на вращающейся с угловой скоростью $\omega = 1{,}57$ рад/с карусели, выпали из кармана с интервалом $\tau = 1$ с два камушка. На каком расстоянии друг от друга ударятся о землю эти камушки, если высота, с которой они упали, равна $h = 2$ м?

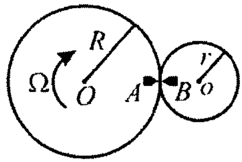
Ответ: $\Delta L = 2\,R\left|\sin\dfrac{\omega\,\tau}{2}\right|\sqrt{1 - \dfrac{2\,h\,\omega^2}{g}} \approx 6$ м.

1.1.35. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты. Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость v_B точки B, находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найти скорость v центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.



Ответ: $v = \dfrac{v_0}{1 - \operatorname{tg}\alpha} \approx 2{,}37$ м/с.

1.1.36. Ведущая шестерня радиусом $R = 20$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 1$ рад/с и приводит во вращение шестерню радиусом $r = 10$ см. В некоторый момент времени метки A и B, выбитые на шестернях, совпадают (см. рисунок). Через какой минимальный промежуток времени относительная скорость меток станет равной нулю?



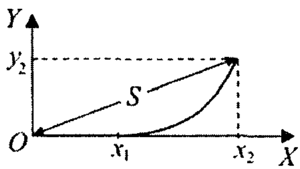
Ответ: $\tau = \dfrac{2\pi r}{(R + r)\Omega} \approx 2{,}1$ с.

1.2. ДИНАМИКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

1.2.1. На материальную точку массой $m = 1$ кг, которая первоначально покоилась, в момент времени $t = 0$ начинает действовать постоянная по модулю сила $F = 1$ Н. До момента времени $t_1 = 5$ с сила сохраняет постоянное направление, а в момент t_1 происходит поворот вектора силы на $90°$, после чего направление силы не меняется. На какое расстояние S удалится материальная точка от своего начального положения к моменту времени $t_2 = 2t_1$, если на нее не действуют никакие другие силы?

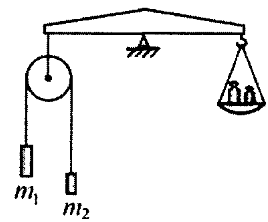
Решение. Будем считать неподвижную относительно земли систему отсчета инерциальной. Совместим начало прямоугольной декартовой системы координат с положением, которое занимала материальная точка в момент времени $t = 0$. Пусть координатная ось OX совпадает с первоначальным направлением силы F, а ось OY – с повернутым (см. рисунок). В соответствии со вторым законом Ньютона, $ma_x = F_x$, $ma_y = F_y$,



где a_x и a_y – проекции ускорения материальной точки на выбранные координатные оси, а F_x и F_y – проекции на эти же оси действующей на нее силы. Отсюда следует, что $a_x = \dfrac{F_x}{m}$, $a_y = \dfrac{F_y}{m}$. Используя формулы кинематики равноускоренного движения, находим, что за время t_1 материальная точка сместится от начала координат вдоль оси OX на величину $x_1 = \dfrac{F}{m} \cdot \dfrac{t_1^2}{2}$ и приобретет вдоль этой оси скорость $v_1 = \dfrac{F}{m} t_1$. К моменту времени $t_2 = 2t_1$ перемещение точки вдоль оси OX составит $x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{F}{m} t_1$.

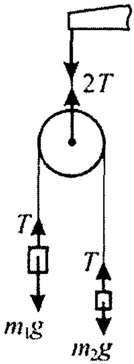
По оси OY, в соответствии со вторым законом Ньютона, перемещение составит $y_2 = \frac{F}{m} \cdot \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{t_1^2}{2}$. Учитывая, что $S = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, получаем ответ: $S = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_1^2 \approx 39{,}5$ м.

При решении этой задачи, как и других задач динамики, важно правильно определить, куда направлена сила, действующая на материальную точку в выбранной системе отсчета. Необходимо помнить, что если, начиная с некоторого момента времени, проекция силы на какую-нибудь ось обращается в ноль, то, с этого же момента времени вдоль этой оси тело движется равномерно.



1.2.2. На невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 50$ г. В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны), блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину Δm нужно изменить массу гирь на правой чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?

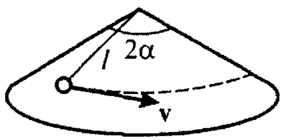
Решение. Будем считать, что система отсчета, неподвижная относительно земли, является инерциальной. Когда блок заторможен, сила натяжения верхней нити, удерживающей его в равновесии, равна суммарной силе тяжести, действующей на грузы: $T' = (m_1 + m_2)g$. При освобождении блока грузы придут в движение, и сила натяжения верхней нити изменится. Из условия невесомости блока и нитей следует, что модуль силы натяжения нижней нити, связывающей грузы, во всех ее точках одинаков (предлагаем читателю доказать это самостоятельно). Обозначив модуль этой силы через T, находим, что во время движения грузов модуль силы натяжения верхней нити будет равным $T'' = 2T$ (см. рисунок). Так как нить нерастяжима, а весы остаются уравновешенными, то грузы движутся с равными по модулю, но противоположными по направлению ускорениями. Чтобы найти T, воспользуемся вторым зако-



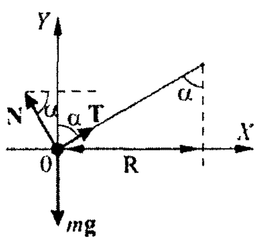
ном Ньютона, из которого следует, что уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось, направленную вниз, имеют вид: $m_1a = m_1g - T$ и $-m_2a = m_2g - T$. Отсюда $T = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$. Следовательно, при освобождении грузов сила, действующая на левый конец коромысла весов, изменится на величину $\Delta T = T'' - T' = -\dfrac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2}g$, то есть уменьшится. Для восстановления равновесия весов с правой чашки нужно снять гири массой $\Delta m = \dfrac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2} \approx 16{,}7$ г.

Обращаем внимание читателя, что при несвободном движении системы грузов на них, кроме внешних сил, действуют еще и силы со стороны тел, осуществляющих связь между грузами (в данном случае со стороны нити). Неправильное определение роли этих сил обычно приводит к ошибочному решению.

1.2.3. На поверхности гладкого кругового конуса с углом



$2\alpha = 120°$ при вершине покоится шарик, прикрепленный нерастяжимой нитью длиной $l = 20$ см к вершине конуса, как показано на рисунке. Во сколько раз n изменится сила натяжения нити, если шарику сообщить скорость $v = 50$ см/с, направленную перпендикулярно нити вдоль боковой поверхности конуса? Считать, что при движении шарик не отрывается от поверхности конуса. Трение не учитывать, ось конуса вертикальна. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение. Для решения задачи воспользуемся неподвижной относительно земли системой отсчета, считая ее инерциальной. Выберем систему координат, направив координатные оси так, как показано на рисунке. На покоящийся шарик действуют силы, изображенные на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, **N** – сила реакции поверхности конуса, **T** – сила натяжения нити. Условия равновесия шарика имеют вид: $T\sin\alpha - N\cos\alpha = 0$, $T\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0$. Отсюда $T = mg\cos\alpha$. Когда шарику сообщат скорость v, он придет в движение по окружности радиусом $R = l\sin\alpha$ и будет испытывать центростремительное ускорение $\mathbf{a}_{\text{цс}}$, равное по модулю v^2/R и направленное к центру окружности. По второму закону Ньютона $m\mathbf{a}_{\text{цс}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}$. Проецируя это векторное равенство на оси выбранной системы координат, получаем:

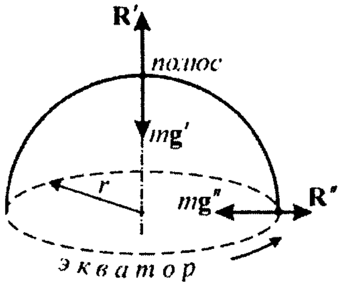
$$\frac{mv^2}{R} = T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha, \quad T_1\cos\alpha + N_1\sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $T_1 = m\left(g\cos\alpha + \dfrac{v^2}{l}\right)$ и $n = \dfrac{T_1}{T} = 1 + \dfrac{v^2}{gl\cos\alpha} = 1{,}25$.

Типичные ошибки при решении подобных задач связаны с неправильным определением направления силы нормального давления, которая всегда действует перпендикулярно поверхности.

1.2.4. Вес тела на экваторе планеты составляет $\eta = 97\%$ от веса этого же тела на полюсе. Найти период T вращения планеты вокруг своей оси, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$. Планету считать однородным шаром.

Решение. Будем проводить решение задачи в системе отсчета, начало которой находится в центре планеты, а координатные оси сохраняют неизменную ориентацию в пространстве (не вращаются относительно далеких звезд). Считая эту систему инерциальной, рассмотрим силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе. Эти силы изображены на рисунке, где $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{g}''$ – ускорения, вызываемые силой тяжести, $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}''$ – силы реакции опор, на которых покоится тело. Поскольку планета представляет собой однородный шар, ускорения $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{g}''$ различаются только направлением, а модули их совпадают: $g' = g'' = g$. Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены, и его вес по величине равен $P' = R' = mg$. Тело, находящееся на экваторе, движется по окружности, радиус которой равен радиусу планеты r. Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены, и по второму закону Ньютона $m\omega^2 r = mg - R''$, где ω – угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на экваторе по величине равен $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$. По



условию $mg - m\omega^2 r = \dfrac{\eta}{100\%} mg$, откуда $\omega^2 = \dfrac{g}{r}\left(1 - \dfrac{\eta}{100\%}\right)$. С другой стороны, $g = \dfrac{GM}{r^2}$, где $M = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$ – масса планеты. Отсюда следует, что $\dfrac{g}{r} = \dfrac{4}{3}\pi G\rho$. Учитывая, что период вращения планеты $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, получаем ответ: $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho\left(1 - (\eta/100\%)\right)}} \approx 4{,}34 \cdot 10^4 \text{с} \approx 12$ час.

При решении этой задачи не надо забывать, что тело, находящееся в любой точке поверхности планеты (кроме полюса), совершает движение по окружности. Это означает, что у тела есть центростремительное ускорение.

1.2.5. Вокруг планеты, имеющей форму шара радиусом $r = 3400$ км, по круговой орбите движется спутник. Определить радиус орбиты спутника R, считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 3{,}7$ м/с^2 и период обращения спутника $T = 3$ земных часа.

Решение. Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $g = G\frac{M}{r^2}$ и $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем ответ: $R = \sqrt[3]{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}} \approx 5000$ км.

При решении этой задачи необходимо помнить, что ускорение свободного падения определяется вблизи поверхности планеты. Часто встречающейся ошибкой является запись $\frac{mv^2}{R} = mg$, где g — ускорение свободного падения на поверхности планеты.

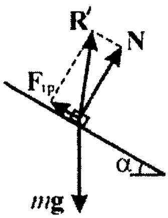
1.2.6. Санки можно удержать на горке с углом наклона $\alpha = 30°$ минимальной силой $F = 60$ Н, направленной вдоль горки. Предоставленные самим себе, они скатываются с ускорением $a = 4$ м/с^2. Какую минимальную силу F_1, направленную вдоль горки, нужно приложить к санкам, чтобы тянуть их в горку с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Пусть m – масса санок, а μ – коэффициент трения между санками и горкой. В соответствии со вторым законом Ньютона, уравнения движения санок в проекции на направление горки имеют следующий вид: $F = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (когда санки удерживают на горке минимальной силой), $ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (когда санки скатываются с горки), $F_1 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ (когда санки равномерно тянут вверх). Исключая отсюда m и μ, получаем ответ:

$$F_1 = F\left(2\frac{g}{a}\sin\alpha - 1\right) = 90 \text{ Н}.$$

При решении этой задачи важно понимать, что в случае, когда санки удерживают на горке, сила $mg\sin\alpha$ уравновешивается не только заданной минимальной силой F, но и силой трения покoя (которая в данном случае равна силе трения скольжения $\mu mg\cos\alpha$). Если не учесть это обстоятельство, то решение получится неправильным.

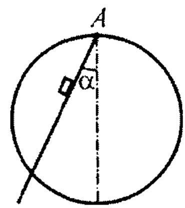
1.2.7. Брусок массой $m = 1$ кг находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Определить величину силы R, с которой брусок действует на плоскость, если коэффициент трения между ними $\mu = 0{,}7$, а ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Рассмотреть случаи $\alpha = 30°$ и $\alpha = 45°$.



Решение. По третьему закону Ньютона искомая сила равна по величине и противоположна по направлению силе $\mathbf{R}'$, с которой плоскость действует на брусок. Разложим $\mathbf{R}'$ на две составляющие: перпендикулярную наклонной плоскости силу давления $\mathbf{N}$ и параллельную наклонной плоскости силу трения $\mathbf{F}_{тр}$ (см. рисунок). В проекции на нормаль к наклонной плоскости сумма сил, действующих на брусок, равна нулю: $N = mg\cos\alpha$. Величина второй составляющей силы $\mathbf{R}'$ зависит от коэффициента трения между бруском и плоскостью. Поскольку в условии задачи не сказано, покоится ли брусок на наклонной плоскости, или скользит по ней, необходимо рассмотреть оба эти случая по отдельности. Легко показать, что предоставленное самому себе тело покоится на наклонной плоскости, если коэффициент трения удовлетворяет неравенству: $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$ (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно). В этом случае сила трения покоя определяется из условия равновесия тела: $F_{тр} = mg\sin\alpha$. Если же $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, то между бруском и плоскостью действует сила трения скольжения: $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Учитывая, что $R = R' = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2}$, получаем ответ: $R = mg\sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha$ при $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, $R = mg$ при $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$. Теперь можно рассмотреть случаи $\alpha = 30°$ и $\alpha = 45°$. В первом случае $\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$, и $R = 9{,}8$ Н; во втором случае $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, и $R \approx 8{,}5$ Н.

Главной ошибкой в решении этой задачи является часто встречающееся утверждение, что сила, с которой брусок действует на плоскость – это сила реакции опоры. Другим заблуждением может быть определение величины силы трения, как $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$, независимо от того, движется брусок или покоится.

1.2.8. Обруч диаметром D располагается в вертикальной плоскости. В точке A, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра обруча, на шарнире закреплен желоб, угол наклона которого можно менять (см. рисунок). По желобу из точки A пускают скользить с нулевой начальной скоростью небольшой брусок. Найти зависимость времени τ, через которое брусок достигнет точки пересечения желоба и обруча, от угла α, который желоб образует с вертикалью. Коэффициент трения бруска о желоб μ. Найти время τ для случая $D = 90$ см, $\alpha = 45°$ и $\mu = 0{,}5$, ускорение свободного падения при расчете принять равным $g = 10$ м/с^2.

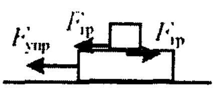


Решение. Уравнение движения бруска по желобу, составляющему угол α с вертикалью, имеет вид: $ma = mg\cos\alpha - \mu mg\sin\alpha$, откуда получаем ускорение бруска $a = g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$. Из кинематического соотношения $\tau = \sqrt{\dfrac{2L}{a}}$, где $L = D\cos\alpha$ – путь, пройденный бруском до точки пересечения желоба с обручем, находим ответ: $\tau = \sqrt{\dfrac{2D}{g(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}}$. В диапазоне $0 \le \alpha < \mathrm{arcctg}\,\mu$ время движения бруска увеличивается с ростом α. При $\alpha \ge \mathrm{arcctg}\,\mu$ брусок, предоставленный самому себе, двигаться не будет. Для заданных численных значений получаем $\tau = 0{,}6$ с.

Не следует забывать, что сила трения скольжения, согласно закону сухого трения, равна $\mu \cdot N$, где N – нормальная составляющая силы реакции опоры, действующая на тело со стороны желоба. Если не учесть это обстоятельство, то решение получится неправильным.

1.2.9. На гладком столе помещен брусок массой $M = 1$ кг, на котором лежит коробок массой $m = 50$ г. Брусок прикреплен

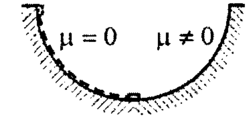
к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой заделан в неподвижную стенку. Брусок отводят от положения равновесия перпендикулярно стенке на расстояние Δl и отпускают с нулевой начальной скоростью. При каком значении Δl коробок начнет скользить по бруску? Коэффициент трения коробка о брусок $\mu = 0{,}2$, жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Трением бруска о стол пренебречь.



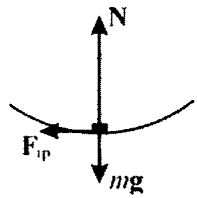
Решение. Пусть брусок сместили от положения равновесия на расстояние Δl вправо. Силы, действующие тела в момент, когда брусок отпустили, изображены на рисунке, где $F_{упр} = k\Delta l$ – модуль силы упругости (закон Гука), $F_{тр}$ – модуль силы трения. Пусть скольжение коробка по бруску отсутствует. Тогда уравнения движения тел имеют вид: $Ma = k\Delta l - F_{тр}$, $ma = F_{тр}$. Отсюда находим, что в отсутствие скольжения $k\Delta l = (m + M)a$. Поскольку сила трения покоя $F_{тр} \le \mu mg$, максимально возможное ускорение коробка $a_{max} = \mu g$. Следовательно, скольжение коробка начнется, если $k\Delta l > (m + M)a_{max}$. Ответ: $\Delta l > \dfrac{(M + m)}{k} \cdot \mu g = 4{,}2$ мм.

При решении подобных задач легко ошибиться в определении направления сил сухого трения, действующих на брусок и на коробок. Следует помнить, что эти силы всегда направлены противоположно возможному перемещению одного тела относительно другого в отсутствие трения.

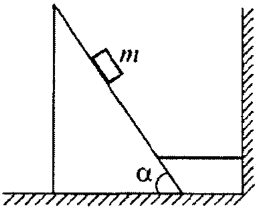
1.2.10. Маленькое тело соскальзывает с нулевой начальной скоростью по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной ее радиусу. Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая – шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}15$. Определить величину ускорения a тела в тот момент, когда оно перейдет на шероховатую поверхность. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Силы, действующие на тело в момент, когда оно оказывается на шероховатой поверхности, изображены на рисунке, где $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, $\mathbf{N}$ – нормальная к поверхности полусферы составляющая силы реакции, $m\mathbf{g}$ – сила тяжести. Разложив ускорение тела $\mathbf{a}$ на две составляющие – касательную к поверхности $\mathbf{a}_\tau$ и нормальную к поверхности $\mathbf{a}_n$, имеем в рассматриваемый момент времени: $ma_\tau = F_{\text{тр}} = \mu N$, $ma_n = N - mg$. Поскольку $a_n = v^2 / R$, где v – скорость тела, из последнего уравнения следует, что $N = \dfrac{mv^2}{R} + mg$. При движении тела по гладкой поверхности справедлив закон сохранения энергии: $\dfrac{mv^2}{2} = mgR$. Объединяя записанные соотношения, находим, что $a_n = 2g$, $a_\tau = 3\mu g$. Отсюда $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g\sqrt{9\mu^2 + 4} = 20{,}5$ м/с^2.

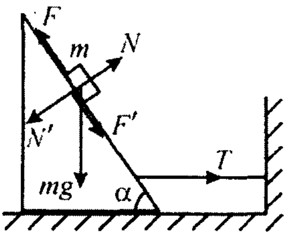


Обратите внимание, что в задачах, где тело движется по дуге окружности, удобно воспользоваться разложением движения на нормальную и тангенциальную составляющие.



1.2.11. На гладкой горизонтальной плоскости стоит клин, привязанный к стене невесомой горизонтальной нерастяжимой нитью. На клин кладут брусок, который начинает соскальзывать с клина (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о клин равен $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577$. При какой величине угла α сила натяжения нити будет максимальна?

Решение. Ясно, что если брусок покоится на шероховатой поверхности клина, то нить не будет натянута. Поэтому брусок должен скользить по клину. Обозначим массу бруска через m. Тогда на клин со стороны бруска действуют сила нормального давления $N' = mg\cos\alpha$ и сила трения $F' = \mu N' = \mu mg\cos\alpha$, а со стороны нити – сила натяжения T (см. рисунок). Так как клин покоится, то сумма проекций этих сил на горизонтальное направление равна нулю:



$$T - N'\sin\alpha + F'\cos\alpha = 0\text{. Отсюда}$$

$$T = N'\sin\alpha - F'\cos\alpha = mg(\sin\alpha\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha) =$$

$$= mg\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\mu}{2}(1+\cos 2\alpha)\right) = \frac{mg}{2}(\sin 2\alpha - \mu\cos 2\alpha - \mu) =$$

$$= \frac{mg\sqrt{1+\mu^2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin 2\alpha - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos 2\alpha\right) - \frac{\mu mg}{2}.$$

Вводя обозначения $\sin\psi = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ и $\cos\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, полученное выражение можно переписать в виде:

$$T = \frac{mg\sqrt{1+\mu^2}}{2}\sin(2\alpha - \psi) - \frac{\mu mg}{2}.$$

Оно достигает максимума при $2\alpha - \psi = \pi/2$. Далее для того, чтобы выразить α через ψ (а значит, и через μ), нужно использовать тригонометрическую функцию, изменяющую знак при переходе через $\pi/2$, так как угол 2α может изменяться в пределах от

$2\arctg\mu$ до π. В данном случае наиболее удобно использовать функцию тангенс. Тогда

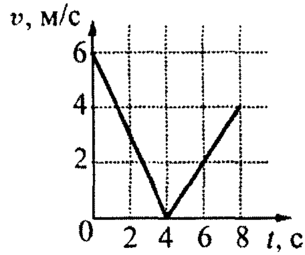
$$\tg 2\alpha = \tg\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\ctg\psi = -\frac{1}{\mu}.$$

Отсюда получаем искомое значение угла наклона:

$$\alpha = \frac{\arcctg(-\mu)}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\arctg\mu}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Заметим, что при решении данной задачи применен стандартный прием, который позволяет привести разность двух тригонометрических функций (синуса и косинуса) со стоящими перед ними коэффициентами к синусу вспомогательного аргумента, что сильно упрощает отыскание максимума полученного выражения.

Задачи для самостоятельного решения

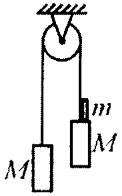


1.2.12.[E] Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем движется вниз. График зависимости модуля скорости шайбы от времени дан на рисунке. Найти угол α наклона плоскости к горизонту.

Ответ: $\alpha = \arcsin 0{,}125 \approx 7°$.

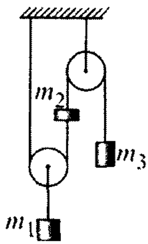
1.2.13. Два шарика одинакового диаметра, имеющие массы $m_1 = 300$ г и $m_2 = 100$ г, связаны между собой легкой нерастяжимой нитью, длина которой значительно превышает диаметр шариков. Шарики сбросили с достаточно большой высоты. Спустя некоторое время после этого вследствие сопротивления воздуха скорость падения шариков стала постоянной. Найти натяжение нити T при установившемся падении шариков. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $T = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{2} = 1$ Н.



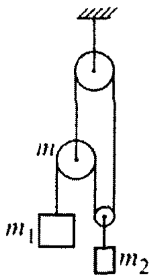
1.2.14. Два одинаковых груза массой $M = 1$ кг связаны между собой нитью, перекинутой через блок с неподвижной осью. На один из грузов кладут перегрузок массой $m = 0{,}1$ кг. С какой силой F будет давить перегрузок на груз M? Массой блока и нити, а также трением в оси блока пренебречь, нить считать нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F = \dfrac{2Mm}{2M + m} g = 0{,}95$ Н.



1.2.15. В системе, показанной на рисунке, грузы массами $m_2 = 1$ кг и $m_3 = 5$ кг прикреплены к концам невесомой нерастяжимой нити. На такой же нити, один конец которой закреплен, а другой прикреплен к грузу массой m_2, висит подвижный блок. К оси этого блока на легких нерастяжимых нитях подвешен груз массой $m_1 = 6$ кг. Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Пренебрегая трением и массой блоков, найти модуль и направление ускорения груза m_1. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

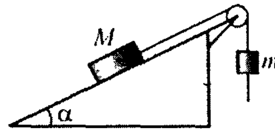
Ответ: $\mathbf{a}_1 = \dfrac{m_1 + 2(m_2 - m_3)}{m_1 + 4(m_2 + m_3)} \mathbf{g}$. При заданных массах ускорение груза m_1 направлено вверх, его модуль составляет $|a_1| \approx 0{,}67$ м/с^2.



1.2.16. В системе, показанной на рисунке, отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Найдите модуль ускорения груза массой $m_2 = 4$ кг, подвешенного на нити к лёгкой оси подвижного блока. Масса оси другого подвижного блока равна $m = 1$ кг, масса первого груза равна $m_1 = 2$ кг. Трением и массой всех блоков пренебречь. Все нити невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

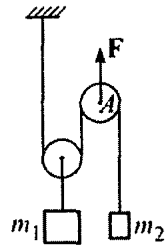
Ответ: $a_2 = \dfrac{(m + m_1)m_2}{m(4m_1 + m_2) + m_1 m_2} g = 6$ м/с^2.

1.2.17. Через гладкий блок, закрепленный на гладкой неподвижной наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, перекинута легкая нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к бруску массой $M = 5$ кг, лежащему на плоскости, а свисающий конец пропущен через узкое отверстие в грузе массой $m = 1$ кг, как показано на рисунке. Если одновременно отпустить брусок и груз, нить будет проскальзывать через отверстие с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2 относительно груза. Найти силу T натяжения нити. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



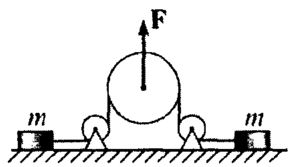
Ответ: $T = \dfrac{g(1+\sin\alpha) - a}{m+M} mM = 10$ Н.

1.2.18. В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трение отсутствует. Массы грузов равны $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 4$ кг. Найдите модуль ускорения оси блока A, к которой приложена в вертикальном направлении сила $F = 16$ Н. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Ответ: $a = \left| \dfrac{3}{2} g - \dfrac{m_1 + 4m_2}{4m_1 m_2} F \right| = 6$ м/с^2.

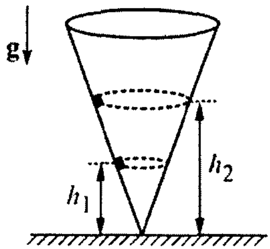
1.2.19. Два груза с массами $m = 1$ кг и $M = 3$ кг, лежащие на гладкой горизонтальной плоскости, соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкие блоки. В момент времени $t = 0$ к верхнему блоку прикладывают силу $F = 3$ Н, направленную вертикально вверх. Найти зависимость относительной скорости грузов от времени t. Чему будет равна относительная скорость грузов через $t = 2$ с после начала движения?



Ответ: $v_{отн} = \dfrac{m+M}{2mM} F t$; через $t = 2$ с после начала движения $v_{отн} = 4$ м/с.

1.2.20. Маленький шарик массой $m = 100$ г подвешен на длинной нити к потолку вагона, который равномерно движется по криволинейному участку пути со скоростью $v = 72$ км/час. С какой силой T натянута нить, если радиус закругления участка пути $R = 200$ м? Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с^2.

Ответ: $T = m\sqrt{g^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2} \approx 1$ Н.



1.2.21. По внутренней поверхности гладкой конической воронки, стоящей вертикально, скользят с постоянными по величине скоростями на высотах $h_1 = 20$ см и $h_2 = 40$ см от вершины конуса две маленькие шайбы (см. рисунок). Запишите для таких шайб аналог третьего закона Кеплера, то есть найдите отношение квадратов их периодов обращения вокруг оси конуса.

Ответ: $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{h_1}{h_2} = 0,5$.

1.2.22. Маленький шарик подвешен на лёгкой нити длиной $l = 1$ м. Один раз его отклоняют на некоторый угол и сообщают ему такую скорость в горизонтальном направлении, что он начинает вращаться по окружности в горизонтальной плоскости с периодом обращения $T = 1,68$ с. В другой раз шарик отклоняют на тот же угол и отпускают его с нулевой начальной скоростью. Найдите максимальное отношение k силы натяжения нити в первом случае к силе её натяжения во втором случае. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с^2.

Ответ: $k = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^4 \left(\dfrac{l}{g}\right)^2 \approx 2$.

1.2.23. На кольцо радиусом $R = 0,5$ м, сделанное из гладкой жесткой тонкой проволоки, надета маленькая бусинка, к которой прикреплена невесомая нерастяжимая нить длиной R. Кольцо закреплено на вертикальной оси, совпадающей с одним из его диаметров. Если свободный конец нити прикрепить к верхней точке кольца, а затем начать медленно раскручивать кольцо вокруг оси, то нить лопнет, когда угловая скорость вращения станет равной $\omega_1 = 1$ рад/с. При какой угловой скорости лопнула бы эта нить, если бы она была прикреплена к нижней точке кольца?

Ответ: $\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \dfrac{4g}{R}} = 9$ рад/с.

1.2.24. Ракета массой $m = 2$ кг, стартовавшая с поверхности Земли, летит с работающим двигателем со скоростью $v = 20$ м/с по дуге окружности радиусом $R = 100$ м, лежащей в вертикальной плоскости. Найти модуль силы тяги двигателя в тот момент, когда скорость ракеты направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту.

Ответ: $F_т = \dfrac{m\sqrt{g^2 R^2 - 2gRv^2 \cos\alpha + v^4}}{R} \approx 17,4$ Н.

1.2.25. Маленькую шайбу массой $m = 100$ г запустили со скоростью $v_0 = 0,6$ м/с в направлении по касательной к внутренней поверхности находящейся в невесомости сферы массой $M = 500$ г и радиусом $r = 0,5$ м. Найдите модуль силы, действующей на шайбу со стороны сферы. Трение отсутствует, сфера вначале покоилась.

Ответ: $F = \dfrac{mM}{m+M} \cdot \dfrac{v_0^2}{r} = 0,06$ Н.

1.2.26.[Е] Масса Марса составляет 0,1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше, чем диаметр Земли. Каково отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли $T_М/T_З$, движущихся по круговым орбитам на небольшой высоте?

Ответ: $\dfrac{T_М}{T_З} = \sqrt{\dfrac{R_М^3 M_З}{R_З^3 M_М}} \approx 1,1$.

1.2.27. Спутник движется по круговой орбите, радиус которой составляет $n = 6$ радиусов планеты. Какова плотность вещества планеты ρ, если период обращения спутника $T = 24$ часа? Планету считать однородным шаром. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$.

Ответ: $\rho = \dfrac{3\pi n^3}{GT^2} \approx 4{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

1.2.28. Две звезды одинаковой массой $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг движутся по окружности радиусом $R = 10^{10}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности. Пренебрегая влиянием других небесных тел, определить период T обращения звезд. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$. Ответ выразите в сутках, округлив до целых.

Ответ: $T = 4\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}} \approx 13$ суток.

1.2.29. Период обращения спутника по круговой орбите вблизи поверхности планеты равен $T_1 = 5 \cdot 10^3$ с. Если бы круговая орбита спутника проходила на высоте $h = 1{,}27 \cdot 10^7$ м от поверхности планеты, то период обращения спутника был бы равен $T_2 = 2{,}6 \cdot 10^4$ с. Определить ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты. Вращение планеты вокруг собственной оси не учитывать.

Ответ: $g = \dfrac{4\pi^2}{T_1^2} \cdot \dfrac{h}{(T_2 / T_1)^{2/3} - 1} \approx 10$ м/с^2.

1.2.30. Известно, что вес тела на высоте $h = 100$ км над поверхностью планеты на полюсе равен весу этого же тела на поверхности планеты на экваторе. Найти период T вращения планеты вокруг оси, если радиус планеты $r = 1000$ км, а ускорение свободного падения у поверхности на полюсе $g = 4{,}76$ м/с^2. Планету считать однородным шаром.

Ответ: $T = 2\pi\left(1+\frac{h}{r}\right)\sqrt{\frac{r}{g\left(\left(1+\frac{h}{r}\right)^2-1\right)}} \approx 6{,}9\cdot 10^3$ с.

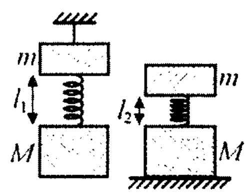
1.2.31.[E] Автомобиль движется по выпуклому мосту. При каком значении радиуса R круговой траектории автомобиля в верхней точке траектории водитель испытает состояние невесомости, если модуль скорости автомобиля в этой точке равен v = 72 км/ч? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Ответ: $R = \frac{v^2}{g} = 40$ м.

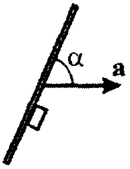
1.2.32. Автомобиль со всеми ведущими колесами проезжает верхнюю точку моста со скоростью v = 54 км/ч. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может иметь автомобиль, если коэффициент трения колес о мост равен $\mu = 0{,}4$, а радиус кривизны моста у вершины равен R = 50 м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Ответ: $a_{\max} = \mu\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \approx 2{,}2$ м/с^2.

1.2.33. Невесомая пружина скрепляет два груза массами $m = 1$ кг и $M = 3$ кг. Когда эта система подвешена за верхний груз, длина пружины равна $l_1 = 20$ см. Если систему поставить на подставку, длина пружины будет равна $l_2 = 10$ см. Определить длину l_0 ненапряженной пружины.



Ответ: $l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m+M} = 12{,}5$ см.



1.2.34. На гладком столе лежит доска, к которой вплотную прижат брусок. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}1$. Доску начинают поступательно перемещать по столу с некоторым постоянным ускорением. При каком минимальном значении α_{min} угла α между плоскостью доски и вектором ускорения брусок не будет скользить по доске?

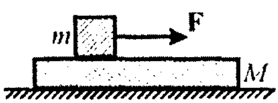
Ответ: $\alpha_{min} = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\mu} \approx 84\,°$.

1.2.35. На горизонтальном диске на расстоянии $R = 50$ см от оси лежит маленькая шайба. Диск медленно раскручивают так, что его угловая скорость равномерно возрастает со временем. Через время $\tau = 20$ с после начала раскручивания шайба начала скользить по диску. Найти коэффициент трения шайбы о диск, если за время τ диск сделал $n = 5$ оборотов.

Ответ: $\mu = \dfrac{4\pi n R\sqrt{16\pi^2 n^2 + 1}}{g\tau^2} \approx 0{,}5$.

1.2.36. На стальной стержень круглого сечения плотно одето тонкое резиновое кольцо. Сила растяжения кольца равна $T = 10$ Н. Какую силу F нужно приложить, чтобы сдвинуть кольцо вдоль стержня без вращения, если коэффициент трения между сталью и резиной равен $\mu = 0{,}8$? Сдвигающая сила равномерно распределена по кольцу.

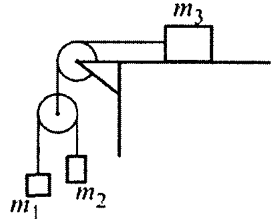
Ответ: $F = 2\pi\mu T \approx 50$ Н.



1.2.37. Брусок массой $M = 5$ кг находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит кубик массой $m = 1$ кг, к которому приложена горизонтальная сила F. При каком значении этой силы кубик начнет скользить по бруску? Коэффициент трения между кубиком и бруском $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F > \mu m g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) = 6$ Н.

1.2.38. Найти ускорение груза 1 в системе, показанной на рисунке. Силами трения, за исключением силы сухого трения, действующей на груз 3, пренебречь. Коэффициент трения этого груза о горизонтальную плоскость равен μ. Нити считать невесомыми и нерастяжимыми, а блоки – невесомыми. Провести численный расчет для $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 4$ кг, $\mu = 0{,}5$ и $g = 10$ м/с^2.



Ответ. $$\mathbf{a} = \frac{(m_1 - (2\mu + 1)m_2)m_3 + 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)m_3 + 4m_1 m_2}\mathbf{g}$$

при $$\mu < \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)m_3};$$

$$\mathbf{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{g} \text{ при } \mu \geq \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)m_3}.$$

Реализуется первый случай:

$$\mu = 0{,}5 < \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)m_3} = \frac{2}{3}, \ \mathbf{a} = 0{,}4\mathbf{g}.$$

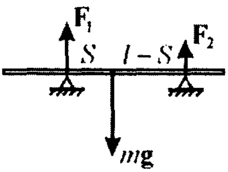
1.2.39. Наклонная поверхность неподвижного клина с углом $\alpha = 30°$ при основании имеет гладкую нижнюю и шероховатую верхнюю части. Коэффициент трения между стержнем и верхней частью клина равен $\mu = 0{,}6$. На верхней части клина удерживают тонкий однородный стержень массой $m = 100$ г, расположенный в плоскости рисунка. После того, как стержень отпускают, он начинает поступательно скользить по клину. Найти максимальную силу натяжения стержня в процессе его движения. Влиянием воздуха пренебречь.

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{1}{4}\mu m g \cos\alpha \approx 0{,}13$ Н.

1.3. СТАТИКА

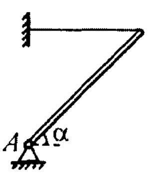
Примеры решения задач и методические рекомендации

1.3.1. Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры $S = 0{,}3$ м. Найти расстояние l между опорами, если известно, что модули сил, действующих на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную $\alpha = 1/5$ веса стержня.



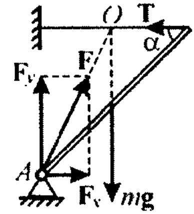
Решение: Решение задачи будем проводить в неподвижной относительно земли системе отсчета, считая ее инерциальной. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – силы реакции опор. Запишем условия равновесия стержня. Для проекций сил на вертикальную координатную ось имеем: $F_1 + F_2 = mg$, а для моментов сил относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и перпендикулярной плоскости рисунка, $F_1 S = F_2(l - S)$. Кроме того, по условию $F_1 - F_2 = \alpha mg$. Исключая из этих уравнений m, F_1 и F_2, получаем ответ: $l = \dfrac{2S}{1-\alpha} = 0{,}75$ м.

Будет полезным решить эту задачу, записав моменты сил, действующих на тело, относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через одну из опор.



1.3.2. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается горизонтальной нитью. Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha = 45°$. Найти модуль F силы реакции шарнира. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

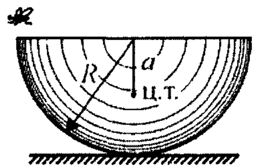
Решение: Будем решать задачу в неподвижной относительно земли системе отсчета, считая ее инерциальной. Введем прямоугольную систему координат, направив ось OX горизонтально, а ось OY – вертикально. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке,



где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{T}$ – сила натяжения нити, $\mathbf{F}_x$ и $\mathbf{F}_y$ – составляющие силы реакции шарнира вдоль осей OX и OY, соответственно. Условия равновесия стержня имеют вид: для проекций сил на оси координат $F_x = T$ и $F_y = mg$; для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости рисунка, $mg\frac{l}{2}\cos\alpha = Tl\sin\alpha$, где l – длина стержня. Учитывая, что $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, получаем ответ:

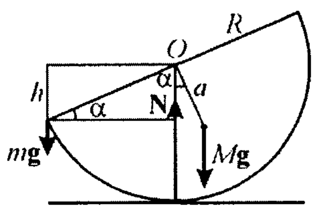
$$F = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\text{ctg}^2\,\alpha} \approx 11 \text{ Н}.$$

Поскольку линии действия сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{T}$ пересекаются в точке O, линия действия силы $\mathbf{F}$ также должна проходить через эту точку, что позволяет до решения задачи однозначно определить направление силы реакции шарнира.



1.3.3. Тонкостенная полусфера массой $M = 20$ г и радиусом $R = 5$ см покоится на горизонтальном столе. На какую высоту h опустится край полусферы, если на него сядет муха массой $m = 0{,}5$ г? Центр тяжести полусферы расположен на расстоянии $a = R/2$ от ее центра.

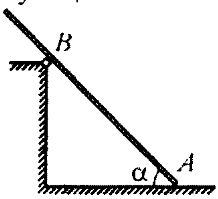
Решение: Для решения задачи будем использовать инерциальную систему отсчета, неподвижную относительно земли. Под действием веса мухи сфера займет наклонное положение, изображенное на рисунке, где через $\mathbf{N}$ обозначена сила реакции стола. Уравнение моментов, записанное относительно оси, перпендикулярной



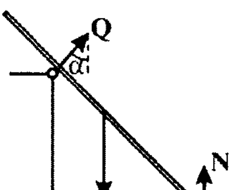
плоскости рисунка и проходящей через точку касания полусферы и стола, имеет вид: $Mga\sin\alpha = mgR\cos\alpha$, где α – угол, на который отклонится полусфера. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{mR}{Ma} = 2\frac{m}{M}$. Из рисунка видно, что искомая величина $h = R\sin\alpha$. Отсюда

$$h = \frac{R\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1+\left(M/(2m)\right)^2}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 2{,}5\ \text{мм}.$$

Главная ошибка при решении подобных задач, как правило, встречается при записи уравнения моментов. В этой задаче следует обратить внимание на определение плеча каждой их действующих сил.

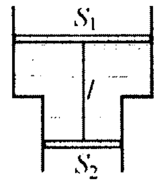


1.3.4. Лестница стоит на шероховатом полу и опирается о выступ, снабженный роликом. Расстояние AB от нижнего конца лестницы до выступа составляет $3/4$ ее полной длины, угол наклона лестницы $\alpha = 45°$. Каков должен быть коэффициент трения μ между лестницей и полом, чтобы она находилась в равновесии? Трением в ролике пренебречь.

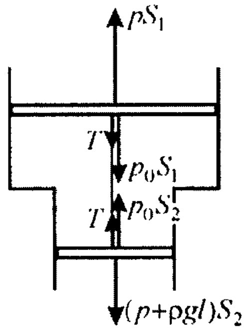


Решение: Лестница находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{N}$ – нормальная составляющая силы реакции пола, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила трения между лестницей и полом, $\mathbf{Q}$ – сила реакции ролика. Условия равновесия имеют вид: для сил в проекции на горизонтальное направление: $F_{\text{тр}} = Q\sin\alpha$, в проекции на вертикальное направление: $mg = N + Q\cos\alpha$, для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A: $Q\frac{3l}{4} = mg\frac{l}{2}\cos\alpha$, где m – масса лестницы, l – ее длина. Учитывая, что $F_{\text{тр}} \le \mu N$, из этой системы уравнений получаем ответ: $\mu \ge \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = 0{,}5$.

При решении этой задачи можно допустить ошибку, если не учесть силу реакции ролика, или неверно определить направление этой силы.

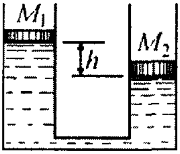


1.3.5. В сосуде, вертикальное сечение которого изображено на рисунке, находятся в равновесии два невесомых поршня, соединенные невесомой нерастяжимой нитью. Пространство между поршнями заполнено жидкостью, плотность которой $\rho = 10^3$ кг/м^3. Найти силу натяжения нити T, если площади поршней $S_1 = 0{,}1$ м^2 и $S_2 = 0{,}05$ м^2, а длина нити $l = 0{,}5$ м. Трением поршней о стенки сосуда пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение: Поршни находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых указаны на рисунке. Для облегчения анализа рисунка точки приложения некоторых сил условно смещены от их истинного положения на оси симметрии системы. Будем использовать следующие обозначения: T – модуль силы натяжения нити, p_0 – атмосферное давление, p – давление жидкости на уровне верхнего поршня. Условия равновесия поршней имеют вид: для верхнего поршня: $p_0S_1 + T = pS_1$, для нижнего поршня: $(p + \rho gl)S_2 = p_0S_2 + T$. Исключая из этих выражений p_0 и p, получаем ответ: $T = \dfrac{\rho glS_1S_2}{S_1 - S_2} = 500$ Н.

При решении этой задачи можно допустить ошибку, если не учесть силу атмосферного давления, действующую на нижний поршень.



1.3.6. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину $h = 10$ см. Когда на левый поршень поместили гирю массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H, если гирю перенести на правый поршень?

Решение: Пусть S_1 и S_2 – площади поршней, ρ – плотность воды. Из условия равенства давлений в воде на одном уровне следуют уравнения: $\dfrac{M_1 g}{S_1} + \rho g h = \dfrac{M_2 g}{S_2}$ (когда поршни находятся в исходном положении), $\dfrac{(M_1 + m)g}{S_1} = \dfrac{M_2 g}{S_2}$ (когда гиря лежит на левом поршне), $\dfrac{M_1 g}{S_1} + \rho g H = \dfrac{(M_2 + m)g}{S_2}$ (когда гиря лежит на правом поршне). Выражая из первого и второго уравнений S_1 и S_2, получаем: $S_1 = \dfrac{m}{\rho h}$, $S_2 = \dfrac{m}{\rho h} \cdot \dfrac{M_2}{M_1 + m}$. Подставляя найденные S_1 и S_2 в третье уравнение, получаем ответ:

$$H = h\left(1 + \frac{M_1 + m}{M_2}\right) = \frac{5}{2}h = 25 \text{ см}.$$

При решении задачи важно с самого начала учесть, что площади поршней отличаются друг от друга. Если ошибочно считать, что площади поршней одинаковы, то решение будет неверным.

1.3.7. В цилиндрическом сосуде уровень воды находится на высоте $H = 20$ см. Когда в сосуд пустили плавать пустой стеклянный стакан, уровень воды поднялся на $\Delta h = 2$ см. На какой высоте H_1 будет располагаться уровень воды в сосуде, если стакан утопить? Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность стекла $\rho_{ст} = 2{,}5$ г/см^3.

Решение: Пусть m – масса стакана, а S – площадь сечения сосуда. Поскольку плавающий стакан вытесняет объем воды, равный $S\Delta h$, условие его плавания имеет вид: $mg = \rho_в g S \Delta h$. Следовательно, объем стекла, из которого изготовлен стакан, равен $V = \frac{m}{\rho_c} = S\Delta h \frac{\rho_в}{\rho_c}$. Этот объем равен объему воды, вытесненному утонувшим стаканом. Отсюда $H_1 = H + \Delta h \frac{\rho_в}{\rho_c} = 20{,}8$ см.

До решения задачи полезно задуматься о том, в каком случае объем вытесненной воды будет больше и почему. Кроме того, при решении этой задачи могут возникнуть трудности в определении высоты поднятия жидкости в сосуде при погружении в него бруска.

1.3.8. Стеклянная бутылка вместимостью $V = 0{,}5$ л и массой $M = 200$ г плавает в воде. Какую массу воды m нужно налить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.

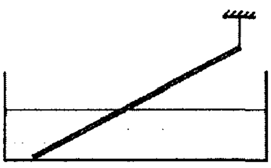
Решение: Наружный объем бутылки равен $V_0 = V + \frac{M}{\rho}$. Условие плавания бутылки, полностью погруженной в воду, имеет вид: $(M + m)g = \rho_в V_0 g$. Отсюда находим, что бутылка утонет, если в нее налить воду массой $m > \rho_в V - M\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho}\right) = 0{,}38$ кг.

Перед решением этой задачи полезно вспомнить условия, при выполнении которых: 1) тело плавает на поверхности; 2) тело плавает полностью погруженным в воду; 3) тело тонет.

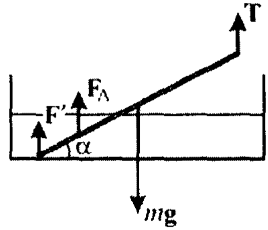
1.3.9. В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если брусок из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину $a = 5$ см, перпендикулярна поверхности жидкости, и высота выступающей части равна $h_1 = 2$ см. Если этот брусок поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет $h_2 = 3$ см. Какой будет величина выступающей части h, если жидкости слить в один сосуд? Жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

Решение: Пусть m – масса бруска, S – площадь его горизонтального сечения, ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкостей в первом и втором сосудах. Тогда условия плавания бруска в этих жидкостях будут иметь вид: $mg = (a - h_1)S\rho_1 g$, $mg = (a - h_2)S\rho_2 g$. Отсюда $\rho_1 = \dfrac{m}{S(a-h_1)}$, $\rho_2 = \dfrac{m}{S(a-h_2)}$. При сливании жидкостей в один сосуд объем образовавшейся смеси по условию равен сумме объемов компонент, которые, в свою очередь, равны друг другу. Отсюда следует, что плотность смеси $\rho = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \dfrac{m}{2S}\left(\dfrac{1}{a-h_1} + \dfrac{1}{a-h_2}\right)$. Условие плавания бруска в смеси имеет вид: $mg = (a - h)S\rho g$. Из последних двух соотношений получаем ответ: $h = \dfrac{a(h_1 + h_2) - 2h_1 h_2}{2a - (h_1 + h_2)} = 2{,}6$ см.

Полезно обдумать, как изменится формула $\rho = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ в случае смешивания двух разных объемов этих жидкостей, если смешивание происходит без изменения суммарного объема.



1.3.10. Алюминиевая спица длиной $L = 25$ см и площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ см^2 подвешена на нити за верхний конец. Нижний конец опирается на горизонтальное дно сосуда, в который налита вода. Длина погруженной в воду части спицы $l = 10$ см. Найти силу F, с которой спица давит на дно сосуда, если известно, что нить расположена вертикально. Плотность алюминия $\rho_а = 2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение: Силы, действующие на спицу, изображены на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, **T** – сила натяжения нити, $\mathbf{F}_A$ – сила Архимеда, $\mathbf{F}'$ – сила реакции дна сосуда. Сила тяжести приложена к центру спицы, сила Архимеда – к центру погруженной в воду ее части. Масса спицы m и модуль силы Архимеда выражаются следующим образом: $m = SL\rho_а$, $F_A = Sl\rho_в g$. Уравнение моментов относительно точки подвеса спицы имеет вид: $F'L\cos\alpha + Sl\rho_в g\left(L - \frac{l}{2}\right)\cos\alpha = SL\rho_а g\frac{L}{2}\cos\alpha$. Учитывая, что $F' = F$, находим ответ: $F = \left(\frac{1}{2}L\rho_а - \left(1 - \frac{l}{2L}\right)l\rho_в\right)Sg \approx 0{,}026$ Н.

При решении подобных задач не следует ошибаться с определением точки приложения действующих на тело сил. Так, например, здесь точкой приложения силы тяжести является центр масс спицы, а точкой приложения силы Архимеда – центр погруженной в воду части спицы.

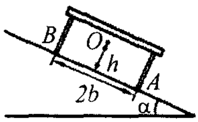
Задачи для самостоятельного решения

1.3.11. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}8$ кг несет на концах два маленьких шарика, массы которых $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}25$ кг. Стержень может поворачиваться на горизонтальной оси, находящейся на расстоянии $l_1 = 0{,}3$ м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставлена опора. Найти модуль силы F, действующей на опору. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F = \left(m_2 + \frac{(ml/2) - (m + m_1)l_1}{l - l_1}\right)g \approx 3{,}93$ Н.

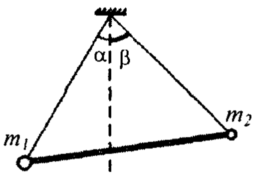
1.3.12. Деревянная линейка выдвинута за край стола на $\alpha = 1/4$ часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более $m_1 = 250$ г. На какую часть длины β можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающийся конец положен груз массой $m_2 = 125$ г?

Ответ: $\beta = \dfrac{m_1\alpha}{m_2 + 2\alpha(m_1 - m_2)} = \dfrac{1}{3}$.



1.3.13. На плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, стоит скамейка, центр тяжести которой (точка O) расположен посередине на расстоянии $h = 0{,}5$ м от наклонной плоскости. Расстояние между ножками A и B скамейки равно $2b = 2$ м. Определить отношение сил давления ножек A к силе давления ножек B. Ответ округлить до десятых.

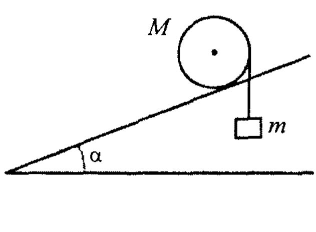
Ответ: $\dfrac{F_A}{F_B} = \dfrac{b + h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b - h\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx 1{,}8$.



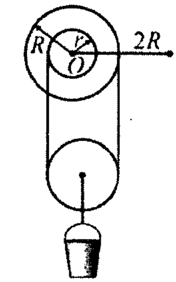
1.3.14. Два шарика, соединенные невесомым жестким стержнем, подвешены на невесомых нитях одинаковой длины, закрепленных в одной и той же точке. Найти отношение масс шариков $k = m_1 / m_2$. Известно, что нить, на которой висит первый из них, отклонена от вертикали на угол $\alpha = 30°$, а нить, на которой висит второй, отклонена на угол $\beta = 45°$.

Ответ: $k = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{2}$.

1.3.15. Цилиндр массой $M = 10$ кг поместили на рельсы, наклоненные под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.

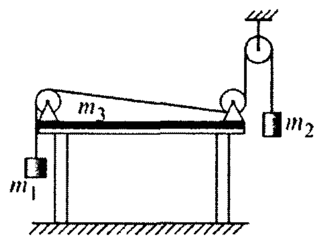


Ответ: $m > \dfrac{M\sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = 10$ кг.



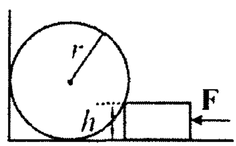
1.3.16. Так называемый «китайский ворот» представляет собой два цилиндрических вала радиусами $r = 10$ см и $R = 20$ см, насаженных на общую ось, закрепленную горизонтально (на рисунке показан вид сбоку). На валы в противоположных направлениях намотана веревка, на которой висит подвижный блок такого радиуса, что свободные участки веревки практически вертикальны. К оси блока прикреплен груз массой $m = 10$ кг. Ворот снабжен ручкой, конец которой находится на расстоянии $2R$ от оси ворота. Какую силу необходимо прикладывать к концу ручки ворота для того, чтобы равномерно поднимать груз, если веревка и блок очень легкие, а трения в осях и проскальзывания веревки нет? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F = \dfrac{mg(R-r)}{4R} = 12{,}5$ Н.



1.3.17. В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения в осях блоков и проскальзывания нити нет. Массы грузов на концах нити равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг. Однородная доска массой m_3 лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закреплённые на доске блоки, проходят вдоль её торцов. При какой массе доски она при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?

Ответ: $m_3 \geq \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2} = 3$ кг.



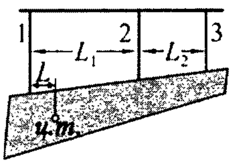
1.3.18. Твердый шар радиусом r и массой m лежит на полу, касаясь вертикальной стены. К нему прижимают с силой **F**, направленной горизонтально, брусок высотой h $(h < r)$ так, как показано на рисунке. Пренебрегая трением, найти модуль силы давления f шара на пол. Провести численный расчет для $m = 1$ кг, $r = 10$ см, $h = 5$ см, $F = 15$ Н, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $f = \left(m - \dfrac{(r-h)F}{g\sqrt{(2r-h)h}} \right) g$ при $F < \dfrac{mg\sqrt{(2r-h)h}}{r-h}$;

$f = 0$ при $F \ge \dfrac{mg\sqrt{(2r-h)h}}{r-h}$.

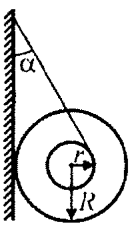
Поскольку $F = 15$ Н $< \dfrac{mg\sqrt{(2r-h)h}}{r-h} \approx 17{,}3$ Н,

то реализуется первый случай, и $f \approx 1{,}3$ Н.



1.3.19. Неоднородная балка подвешена к потолку на трех одинаковых в недеформированном состоянии легких резиновых шнурах так, что шнуры вертикальны и лежат в одной плоскости. Расстояния между шнурами равны $L_1 = 50$ см и $L_2 = 30$ см, а между первым шнуром и центром тяжести балки (по горизонтали) – $L = 10$ см. Точки крепления шнуров к балке лежат на одной прямой. Найти отношение сил натяжения первого и второго шнуров, считая их деформации малыми.

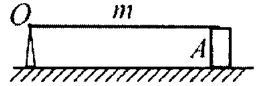
Ответ: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{2L_1^2 + (2L_1 + L_2)(L_2 - L)}{L_1(L_2 + L) + L_2(L_2 - L)} \approx 2{,}9$.



1.3.20. К гвоздю, вбитому в вертикальную стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, опираясь о стенку. Нить составляет со стенкой угол $\alpha = 30°$. Размеры катушки: $r = 1$ см, $R = 10$ см. Найти минимальное значение коэффициента трения μ между стенкой и катушкой, при котором катушка неподвижна.

Ответ: $\mu = \dfrac{r}{R\sin\alpha} = 0{,}2$.

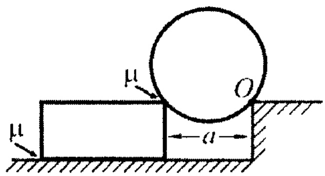
1.3.21. Тонкий однородный стержень массой $m = 1$ кг расположен горизонтально. Один конец стержня может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной стержню, а другой опирается на маленький жесткий брусок A, лежащий на горизонтальной доске (см. рисунок). Брусок начинают двигать по доске вдоль стержня в сторону оси. Найти величину силы, с которой ось действует на стержень, в моменты времени, когда эта сила оказывается направленной под углом $\alpha = 45°$ к стержню. Коэффициент трения бруска о стержень равен $\mu = 0,5$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: $F_1 = \dfrac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \approx 4,7$ Н;

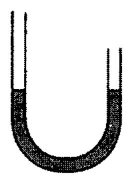
$$F_2 = \frac{\mu m g}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \approx 14,1 \text{ Н}.$$

1.3.22. На горизонтальной плоскости на расстоянии a от закрепленной ступеньки лежит брусок. Высоты ступеньки и бруска одинаковы. На ребро бруска, параллельное краю ступеньки, опирается цилиндр (см. рисунок), который может без трения вращаться вокруг оси O, прикрепленной к краю ступеньки. Массы бруска и цилиндра равны. Если $a \le \sqrt{2}R$, где R – радиус цилиндра, то брусок покоится, а если $a > \sqrt{2}R$, то брусок скользит, не отрываясь от плоскости. Считая коэффициент трения μ между всеми трущимися поверхностями одинаковым, найти величину μ.



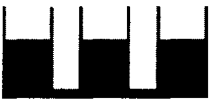
Ответ: $\mu = \dfrac{\sqrt{7} - 2}{3} \approx 0,2$.

1.3.23. Вертикально расположенная U-образная трубка частично заполнена ртутью, причем левый конец трубки выше уровня ртути на $h_1 = 50,2$ см, а правый – на $h_2 = 25$ см. В оба колена трубки наливают



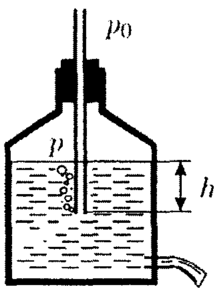
воду так, что они оказываются полностью заполненными. На какую величину Δh переместится уровень ртути в левом колене трубки, если известно, что ртуть из него не вытесняется полностью? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{\rho_в (h_1 - h_2)}{2(\rho - \rho_в)} = 1$ см.



1.3.24. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В левый сосуд налили слой воды высотой $h_1 = 180$ мм, а в правый – высотой $h_3 = 228$ мм. На какую величину h_2 сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3.

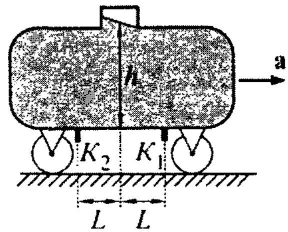
Ответ: $h_2 = \dfrac{\rho_в}{3\rho}(h_1 + h_3) = 10$ мм.



1.3.25. В боковой стенке бутылки проделано маленькое отверстие, в которое вставлена затычка. В бутылку наливают воду и закрывают её горлышко пробкой, через которую пропущена трубка. Длина трубки подобрана таким образом, что её нижний конец находится выше отверстия в стенке бутылки, но ниже поверхности воды, а верхний конец сообщается с атмосферой. Затычку из отверстия в боковой стенке вынимают, и из него начинает вытекать вода. Через некоторое время поток воды из отверстия устанавливается, и вода вытекает с постоянной скоростью. Найдите давление воздуха p, находящегося в бутылке, в тот момент, когда нижний конец трубки находится на глубине $h = 5$ см от поверхности воды. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: $p = p_0 - \rho g h \approx 99{,}5$ кПа.

1.3.26. В дне цистерны, заполненной нефтью, установлены два одинаковых крана K_1 и K_2 небольшого сечения, расположенных на равных расстояниях $L = 5$ м от оси ее горловины. Считая, что скорость вытекания нефти пропорциональна перепаду давлений на кране, найти отношение масс вытекающей через краны нефти при движении цистерны по прямолинейному горизонтальному участку пути с ускорением $a = 1$ м/с^2, если уровень нефти в центре горловины относительно дна равен $h = 2$ м, и при движении цистерны нефть не выливается из горловины. Считать ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с^2.



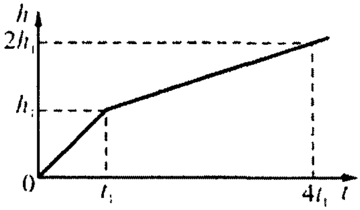
Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{gh - aL}{gh + aL} = 0{,}6$.

1.3.27. Надводная часть айсберга имеет объем $V = 1000$ м^3. Найти массу айсберга M, если плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, а плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $M = V \dfrac{\rho_л \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 9000$ т.

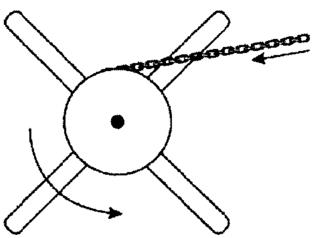
1.3.28. Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения $S = 1$ см^2, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой $h = 5$ см. Какова минимальная плотность жидкости ρ, в которой пробирка с грузиком не утонет, если суммарная масса пробирки и грузика $M = 20$ г? Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\rho = \dfrac{M\rho_0}{M + \rho_0 S h} = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.



1.3.29. На дне цилиндрического сосуда с шероховатым горизонтальным дном лежит шайба из материала с плотностью $\rho = 0{,}8$ г/см^3. В сосуд медленно наливают жидкость с плотностью $\rho_0 = 1$ г/см^3. Пользуясь приведенным на рисунке графиком зависимости высоты уровня h жидкости от времени t, найти массу шайбы, зная, что ее торцы все время остаются горизонтальными, а объем жидкости, наливаемой в сосуд за единицу времени, постоянен и равен $V = 1$ л/мин. На графике $t_1 = 1$ мин, $h_1 = 8$ см.

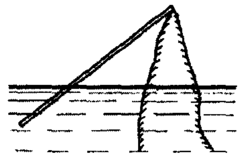
Ответ: $m = 2Vt_1\rho_0 = 2$ кг.



1.3.30. На старинных кораблях для подъёма якоря использовался кабестан – ворот, представлявший собой цилиндрическое бревно, к которому прикреплены одинаковые длинные ручки (см. рисунок). Матросы, отвечавшие за подъём якоря (якорная команда), наваливались на концы ручек, в результате чего ворот вращался, и якорная цепь наматывалась на бревно. Капитан, собираясь в дальнее плавание, приказал утяжелить якорь, после чего выяснилось, что прежняя якорная команда с трудом поднимает якорь только до поверхности воды. Чтобы исправить ситуацию, капитан распорядился переделать ворот. Пренебрегая трением и массой цепи, найдите, во сколько раз нужно удлинить ручки кабестана, чтобы прежняя якорная команда могла поднимать новый якорь до борта. Плотности воды и материала якоря $\rho_в = 1$ г/см^3 и $\rho_я = 8$ г/см^3 соответственно.

Ответ: $k = \dfrac{\rho_я}{\rho_я - \rho_в} \approx 1{,}14$ раза.

1.3.31. Тонкая однородная палочка опирается одним концом о вершину острого камня, выступающего из воды. Другой конец палочки находится на плаву, причем погруженная в воду часть палочки в n раз меньше всей ее длины. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $n = 3$. Найти плотность ρ материала, из которого сделана палочка.

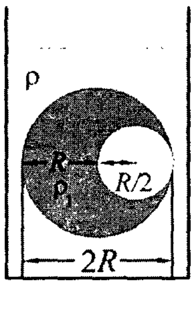


Ответ: $\rho = \frac{\rho_0}{n}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 0{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3.

1.3.32. На дне бассейна лежит тонкий цилиндрический стержень длиной $L = 1$ м, состоящий из двух половин с одинаковыми площадями поперечного сечения и плотностями $\rho_1 = 0{,}5$ г/см^3 и $\rho_2 = 2{,}0$ г/см^3. В бассейн медленно наливают воду плотностью $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3. При какой глубине h воды в бассейне стержень будет составлять с поверхностью воды угол $\alpha = 45°$?

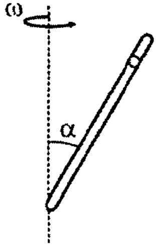
Ответ: $h = \frac{L\sin\alpha}{2}\sqrt{\frac{3\rho_1 + \rho_2}{\rho_0}} \approx 0{,}66$ м.

1.3.33. Лежащий в сосуде шар из материала с плотностью ρ_1 имеет герметичную сферическую полость, радиус которой вдвое меньше радиуса R шара. Центр полости находится на расстоянии $R/2$ от центра шара. К точкам на поверхности шара, находящимся на концах диаметра, проходящего через центры шара и полости, приклеены две одинаковые невесомые нерастяжимые нити, длина каждой из которых больше R. Расстояние между точками крепления других концов нитей к горизонтальному дну сосуда равно $2R$.



В сосуд наливают жидкость с плотностью ρ до тех пор, пока шар не окажется полностью погруженным в жидкость. При этом обе нити оказываются натянутыми (см. рисунок). При каких значениях отношения ρ/ρ_1 возможна такая ситуация?

Ответ: $\frac{\rho}{\rho_1} > \frac{15}{16}$.

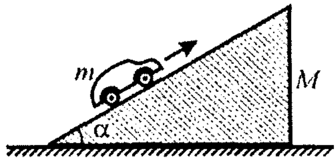


1.3.34. Закрытая трубка длиной $l = 108$ см, полностью заполненная жидкостью, составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикальной осью, проходящей через её нижний конец (см. рисунок). В жидкости плавает лёгкая пробка. До какой угловой скорости ω нужно раскрутить трубку вокруг оси, чтобы пробка погрузилась до середины трубки?

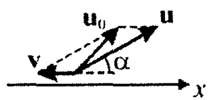
Ответ: $\omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{l}} \approx 8$ рад/с.

1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Примеры решения задач и методические рекомендации



1.4.1. Клин массой $M = 0{,}5$ кг с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ покоится на гладком горизонтальном столе. На наклонную поверхность клина ставят заводной автомобиль массой $m = 0{,}1$ кг и отпускают с нулевой начальной скоростью, после чего автомобиль начинает движение вверх по клину в плоскости рисунка. Найти скорость u автомобиля относительно клина в момент, когда клин приобретает относительно стола скорость $v = 2$ см/с.



Решение. При решении задачи пренебрежем влиянием воздуха и будем использовать инерциальную систему отсчета, связанную со столом, который будем считать неподвижным. Свяжем со столом прямоугольную декартову систему координат и направим ее ось OX в горизонтальном направлении в плоскости рисунка. В данной инерциальной системе отсчета можно применять закон сохранения импульса автомобиля и клина вдоль оси OX, поскольку внешние силы вдоль этого направления отсутствуют (стол по условию горизонтальный и гладкий). Следовательно, в выбранной системе отсчета выполняется соотношение: $mu_{0x} - Mv = 0$, где v – модуль скорости клина относительно стола, u_{0x} – горизонтальная проекция абсолютной скорости автомобиля $\mathbf{u}_0$ на ось OX. По закону сложения скоростей (см. рисунок) $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ – скорость автомобиля относительно клина, $\mathbf{v}$ – скорость клина относительно стола. В проекции на ось OX это равенство имеет вид: $u_{0x} = u_x - v = u\cos\alpha - v$. Объединяя записанные соотношения, получаем: $u = \dfrac{M+m}{m\cos\alpha}v$. Подставляя в эту формулу заданные в условии задачи числа и проверяя размерность, находим ответ: $u = \dfrac{0{,}5\,\text{кг} + 0{,}1\,\text{кг}}{(0{,}1\,\text{кг})\cdot\cos 30^\circ}\cdot 2\,\text{см/с} \approx 14$ см/с.

При решении этой задачи важно понимать, что для рассматриваемой системы тел суммарный импульс сохраняется лишь в проекции на ось OX. Также распространенной ошибкой является неправильное применение закона сложения скоростей.

1.4.2. Граната массой $m = 1$ кг разорвалась на высоте $h = 6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v = 10$ м/с. Один из осколков массой $m_1 = 0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом разрыва со скоростью $v_1 = 40$ м/с. Чему равен модуль скорости v_2 второго осколка сразу после разрыва? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, влиянием воздуха пренебречь.

Решение. Будем использовать систему отсчета, связанную с землей, которую при решении данной задачи можно считать неподвижной. Совместим начало прямоугольной декартовой системы координат с поверхностью земли. Координатную ось OX направим горизонтально в направлении движения гранаты в момент перед ее разрывом, а координатную ось OY – вертикально вверх. В выбранной инерциальной системе отсчета можно использовать закон сохранения импульса: импульс гранаты перед ее разрывом равен суммарному импульсу осколков сразу после разрыва. Обозначим через $v_{1н}$ модуль начальной скорости первого осколка сразу после разрыва гранаты. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время разрыва гранаты ввиду малости времени разрыва, по закону сохранения импульса имеем: в проекции на горизонтальную ось OX: $mv = (m - m_1)v_{2x}$, в проекции на вертикальное направление: $m_1 v_{1н} = (m - m_1)v_{2y}$. Здесь v_{2x} и v_{2y} – проекции начальной скорости второго осколка на оси OX и OY соответственно. Отсюда $v_{2x} = \dfrac{mv}{m - m_1}$, $v_{2y} = \dfrac{m_1 v_{1н}}{m - m_1}$. Скорость первого осколка в момент падения на землю и его скорость сразу после разрыва гранаты связаны кинематическим соотношением: $v_1^2 = v_{1н}^2 + 2gh$. Учитывая, что $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}$, получаем: $v_2 = \dfrac{1}{m - m_1}\sqrt{m^2 v^2 + m_1^2 (v_1^2 - 2gh)}$.

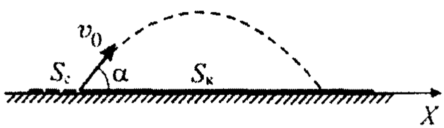
Подставляя в эту формулу заданные в условии задачи числа и проверяя размерность, находим ответ:

$$v_2 = \frac{\sqrt{(1\,\text{кг})^2\cdot(10\,\text{м/с})^2 + (0{,}4\,\text{кг})^2\cdot\left((40\,\text{м/с})^2 - 2\cdot 10\,\text{м/с}^2\cdot 6\,\text{м}\right)}}{1\,\text{кг} - 0{,}4\,\text{кг}} \approx 30{,}6\ \text{м/с}.$$

Отметим, что в вертикальном направлении на рассматриваемую в задаче систему тел действует внешняя сила – сила тяжести. Однако, по причине кратковременности разрыва, импульс этой силы за время разрыва пренебрежимо мал. Именно по этой причине можно использовать закон сохранения импульса в проекции на вертикальное направление.

1.4.3. Кузнечик сидит на одном из концов соломинки длиной $l = 50$ см, покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью v_0 он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнечика в $\beta = 3$ раза больше массы соломинки. Размерами кузнечика и трением между полом и соломинкой пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Свяжем с неподвижным полом инерциальную систему отсчета. Направим координатную ось OX вдоль соломинки в сторону ее второго конца, совместив начало оси с исходным положением кузнечика. В выбранной системе отсчета для



системы двух тел «кузнечик + соломинка» можно применять закон сохранения импульса вдоль оси OX: поскольку трения между полом и соломинкой нет, сохраняется проекция суммарного импульса на горизонтальную ось OX, откуда следует равенство: $mv_0\cos\alpha = Mu$, где m и M – массы кузнечика и соломинки, u – скорость соломинки относительно пола. Отсюда $u = \dfrac{mv_0\cos\alpha}{M}$.

Время t_0, которое кузнечик проводит в полете, равно $t_0 = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

За это время модули перемещения соломинки влево (в отрицательном направлении оси OX) и горизонтального перемещения кузнечика вправо (в положительном направлении оси OX) равны, соответственно: $S_c = ut_0 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{m}{M} \sin\alpha\cos\alpha$, $S_к = v_0 t_0 \cos\alpha = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha$.

По условию эти величины связаны между собой соотношением: $S_c + S_к = l$. Учитывая, что $m/M = \beta$, находим величину начальной скорости кузнечика: $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{(1+\beta)\sin 2\alpha}}$. Эта величина минимальна при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45°$. Отсюда получаем: $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{1+\beta}}$.

Подставляя в эту формулу заданные в условии задачи числа и проверяя размерность, находим ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{10\ м/с^2 \cdot 0{,}5\ м}{1+3}} \approx 1{,}1$ м/с.

Полное решение этой задачи подразумевает анализ полученного ответа. Надо понимать, что скорость кузнечика будет минимальной при максимальном значении $\sin 2\alpha$.

1.4.4. Две пружины, соединенные как показано на рисунке, имеют жесткости $k_1 = 15$ Н/м и $k_2 = 10$ Н/м. Пружины растянули

за свободные концы в разные стороны, совершив работу $A = 1$ Дж. Каковы потенциальные энергии E_1 и E_2 деформации каждой из пружин по отдельности?

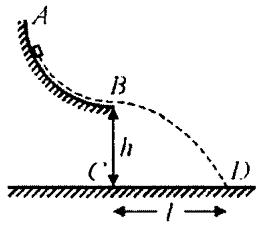
Решение. При растяжении пружин, соединенных последовательно, возникающие в них силы упругости одинаковы. Следовательно, $k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$, где Δl_1 и Δl_2 – абсолютные удлинения пружин. Их сумма равна общему удлинению Δl системы: $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$. Отсюда $\Delta l_1 = \Delta l \frac{k_2}{k_1 + k_2}$, $\Delta l_2 = \Delta l \frac{k_1}{k_1 + k_2}$. Жесткость двух пружин, соединенных последовательно, $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Поэтому работа по их растяжению $A = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \dfrac{\Delta l^2}{2}$, откуда

$\dfrac{\Delta l^2}{2} = \dfrac{A(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$. Потенциальные энергии деформации пружин

$E_1 = \dfrac{k_1 \Delta l_1^2}{2}$, $E_2 = \dfrac{k_2 \Delta l_2^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $E_1 = A\dfrac{k_2}{k_1 + k_2} = 0{,}4$ Дж, $E_2 = A\dfrac{k_1}{k_1 + k_2} = 0{,}6$ Дж.

Было бы неправильным считать, что работа по растяжению последовательно соединенных пружин пропорциональна сумме их жесткостей. Будет полезным самостоятельно определить жесткость двух пружин, соединенных последовательно.

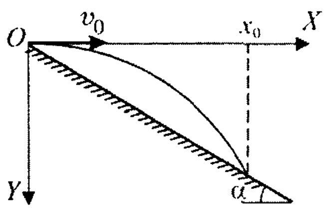


1.4.5. Маленький брусок массой $m = 100$ г соскальзывает по шероховатому желобу AB, составляющему четверть окружности радиусом $R = 1$ м, и падает на горизонтальную поверхность в точку D. Точка B желоба находится на высоте $h = 2$ м от горизонтальной поверхности. Расстояние между точками C и D равно $l = 2$ м. Найти модуль A работы силы трения бруска о желоб. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Согласно закону изменения механической энергии модуль работы силы трения при движении бруска по желобу равен $A = E_н - E_к$, где $E_н = mgR$ – энергия бруска в начале движения по желобу, $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$ – энергия бруска в конце движения по желобу, v – скорость бруска в точке B. Из кинематических уравнений, описывающих свободное падение бруска в течение времени τ, следует: $l = v\tau$, $h = \dfrac{g\tau^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $A = mg\left(R - \dfrac{l^2}{4h}\right) = 0{,}5$ Дж.

При решении этой задачи грубой ошибкой является использование закона сохранения механической энергии, так как в системе действует сила трения, которая относится к непотенциальным силам. Напомним, что, *изменение* механической энергии системы равно работе непотенциальных сил.

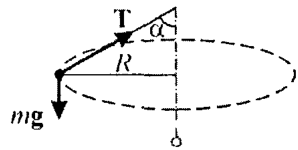
1.4.6. Камень массой $m = 0{,}1$ кг бросают горизонтально с вершины холма, склон которого составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Определить, какая работа A была совершена при броске, если камень упал на склон на расстоянии $L = 40$ м от вершины. Считать, что бросок выполнен непосредственно от поверхности земли. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Введем систему координат, как показано на рисунке. Обозначим через v_0 начальную скорость камня. Кинематические уравнения движения камня имеют вид: $x = v_0 t$, $y = \dfrac{gt^2}{2}$, уравнение его траектории $y = \dfrac{g}{2v_0^2}x^2$. Точка падения камня имеет координаты $x_0 = L\cos\alpha$, и $y_0 = L\sin\alpha$ и, следовательно, $v_0^2 = \dfrac{gL}{2}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку работа, совершенная при броске, равна $A = \dfrac{mv_0^2}{2}$, ответ имеет вид: $A = \dfrac{mgL}{4}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 15$ Дж.

Обратим внимание на то, что в условии задачи речь идет о работе, совершаемой при броске. Эта работа идет на сообщение камню начальной кинетической энергии.

1.4.7. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он вращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу A нужно совершить для реализации такого движения? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Шарик движется по горизонтальной окружности под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{T}$ – сила натяжения нити. В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси неподвижной системы координат уравнения движения шарика имеют вид: $\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$. Учитывая, что $R = l\sin\alpha$, находим кинетическую энергию шарика: $E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgl}{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. Потенциальная энергия шарика относительно положения, занимаемого им в неподвижном состоянии, $E_п = \frac{mgl}{2}$. По закону изменения механической энергии искомая работа $A = E_к + E_п = \frac{mgl}{2}(\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha + 1)$. Поскольку по условию $\cos\alpha = \frac{(l/2)}{l} = \frac{1}{2}$, то $\alpha = 60°$, и ответ имеет вид:

$$A = \frac{5}{4}mgl = 1{,}25 \text{ Дж}.$$

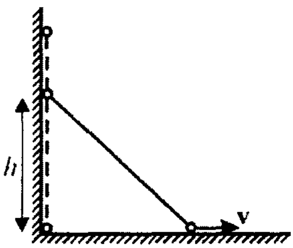
Было бы неверным определять кинетическую энергию шарика, используя закон сохранения энергии, или же не учесть изменение потенциальной энергии шарика.

1.4.8. Развивая максимальную мощность двигателя, автобус движется по горизонтальному участку шоссе с постоянной скоростью $v_0 = 108$ км/ч. Когда автобус при неизменной мощности, развиваемой двигателем, въезжает на подъем с углом наклона $\alpha_1 = 5°$, его скорость падает до $v_1 = 72$ км/ч. С какой скоростью v_2 автобус будет преодолевать подъем с углом наклона

$\alpha_2 = 2{,}5°$ при той же мощности, развиваемой двигателем? Проскальзывание ведущих колес автобуса на всех участках шоссе отсутствует. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости автобуса.

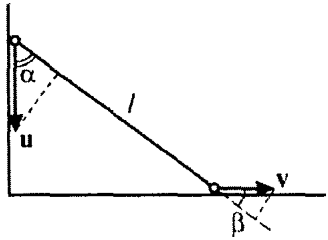
Решение. По условию сила сопротивления воздуха $F = \beta v$, где v – скорость автобуса, β – коэффициент сопротивления. Поэтому часть мощности двигателя, расходуемая на преодоление этой силы, равна $N_1 = Fv = \beta v^2$. При движении автобуса массой m по наклонному участку шоссе часть мощности двигателя расходуется также на увеличение потенциальной энергии автобуса: $N_2 = mg\sin\alpha \cdot v$. Полная мощность, развиваемая двигателем, $N_0 = \beta v^2 + mgv\sin\alpha$. Из условия задачи следует система уравнений: $\beta v_0^2 = \beta v_1^2 + mgv_1 \sin\alpha_1 = \beta v_2^2 + mgv_2 \sin\alpha_2$. Исключая из этой системы β и m, получаем ответ: $v_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + 4v_0^2} - u\right) \approx 24{,}4$ м/с, где $u = \frac{(v_0^2 - v_1^2)\sin\alpha_2}{v_1 \sin\alpha_1} \approx 12{,}5$ м/с.

Следует помнить, что развиваемая двигателем автобуса мощность идет не только на преодоление силы сопротивления воздуха, но также и на увеличение потенциальной энергии автобуса. Если не учесть этот факт, ответ будет неверным.



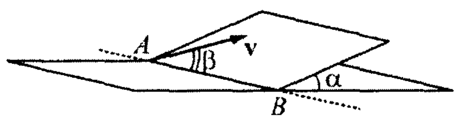
1.4.9. Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомым жестким стержнем длиной $l = 60$ см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости. При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система из шариков приходит в движение в плоскости рисунка. Найти модуль v скорости нижнего шарика в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте $h = 40$ см над горизонтальной плоскостью. Считать, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Поскольку длина стержня постоянна, проекции скоростей шариков на направление стержня в каждый момент времени совпадают. Обозначив через **u** скорость верхнего шарика, имеем (см. рисунок): $u\cos\alpha = v\cos\beta = v\sin\alpha$, откуда $u = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$. Из закона сохранения механической энергии шариков следует равенство: $mgl = mgh + \dfrac{m(u^2+v^2)}{2} = mgh + \dfrac{mv^2}{2}(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l-h)} \approx 1{,}33$ м/с.



Так как шарики соединены стержнем, было бы неправильным применять закон сохранения механической энергии для каждого шарика в отдельности.

1.4.10.[E] Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой AB. Угол между плоскостями $\alpha = 30°$. Маленькая шайба скользит вверх по наклонной плоскости из точки



A с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с, направленной под углом $\beta = 60°$ к прямой AB. Найдите максимальное расстояние, на которое шайба удалится от прямой AB в ходе подъема по наклонной плоскости. Трением между шайбой и наклонной плоскостью пренебречь.

Решение. Разложим скорость шайбы $\vec{v}$ на две составляющие – горизонтальную $v_{\text{г}}$ и $v_{\text{н}}$ – вверх, вдоль наклонной плоскости.

Горизонтальная проекция скорости шайбы на прямую АВ, равная $v_г = v_0 \cos\beta$, не меняется в процессе движения, поскольку силы в этом направлении на шайбу не действуют – трения нет.

В направлении вдоль наклонной плоскости действует составляющая силы тяжести, равная $mg\sin\alpha$. Она замедляет движение шайбы вверх, уменьшая составляющую скорости $v_н$ от начального значения $v_0 \sin\beta$ вплоть до полной остановки ($v_н = 0$), когда шайба удалится от прямой АВ на максимальное расстояние L_{max} и поднимется на высоту $h = L_{max} \sin\alpha$ над горизонтальной плоскостью.

Запишем для этого момента времени закон сохранения механической энергии шайбы, считая ее потенциальную энергию равной нулю на горизонтальной плоскости:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_г^2}{2} + \frac{mv_н^2}{2} = \frac{mv_г^2}{2} + mgh,$$

или

$$\frac{mv_0^2 \sin^2\beta}{2} = mgL_{max} \sin\alpha,$$

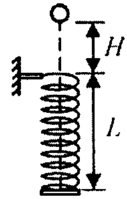
откуда получаем ответ:

$$L_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g\sin\alpha} \approx 0{,}3 \text{ м}.$$

Можно решать эту задачу и из уравнений динамики и кинематики: поскольку ускорение шайбы вверх вдоль наклонной плоскости $a_н = -g\sin\alpha$, то в момент максимального удаления шайбы от прямой АВ $v_н = v_0 \sin\beta - g\sin\alpha \cdot t = 0$ и $L_{max} = v_0 \sin\beta \cdot t - \dfrac{g\sin\alpha \cdot t^2}{2}$. Отсюда, исключая t, получаем тот же ответ.

При решении этой задачи можно допустить ошибку, определяя проекцию силы тяжести в направлении вниз вдоль наклонной плоскости. Следует обратить внимание, что в этом направлении проекция силы тяжести не равна mg.

1.4.11. Невесомая пружина жесткостью $k = 10$ Н/м и длиной $L = 7{,}5$ см подвешена на штативе за верхний конец в вертикальном положении. Нижний конец пружины перекрыт невесомой горизонтальной пластинкой, жестко прикрепленной к пружине. С высоты $H = 2{,}5$ см, отсчитываемой от верхнего края пружины, падает без начальной скорости пластилиновый шарик массой $m = 25$ г. Он пролетает сквозь витки пружины, ударяется о пластинку и прилипает к ней. Какую максимальную скорость v_{max} будет иметь шарик при своем дальнейшем движении вниз? Сопротивление воздуха не учитывать, размером шарика пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



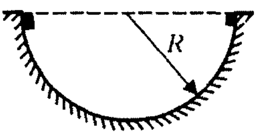
Решение. После того, как шарик коснется пластинки, его движение будет происходить по закону гармонических колебаний. Скорость шарика максимальна в положении, когда сила упругости и сила тяжести, действующие на шарик, уравновешены: $mg = k\Delta x$. Отсюда растяжение пружины в момент достижения шариком максимальной скорости $\Delta x = mg / k$. Согласно закону сохранения механической энергии справедливо равенство $mg(H + L) = \dfrac{mv_{max}^2}{2} + \dfrac{k\Delta x^2}{2} - mg\Delta x$. Выражая отсюда v_{max}, получаем ответ: $v_{max} = \sqrt{2g(H + L) + \dfrac{mg^2}{k}} = 1{,}5$ м/с.

Основные трудности при решении этой задачи вызывает определение положения шарика, при котором его скорость будет максимальной. Следует подчеркнуть, что при гармонических колебаниях тела его скорость максимальна в *положении равновесия*. Кроме того, важно не забыть про начальную потенциальную энергию шарика.

1.4.12. С горки высоты $h = 2$ м с углом наклона $\alpha = 45°$ начинают скатываться санки с нулевой начальной скоростью. Найти скорость v санок у основания горки, если на верхней половине горки коэффициент трения пренебрежимо мал, а на нижней половине коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

Решение. Длина участка горки, на котором коэффициент трения отличен от нуля, $S = \dfrac{h}{2\sin\alpha}$. Модуль силы трения, действующей на санки на этом участке, $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Работа силы трения $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}S = -\dfrac{1}{2}\mu mgh\operatorname{ctg}\alpha$. По закону изменения механической энергии $\dfrac{mv^2}{2} - mgh = A_{\text{тр}}$. Ответ: $v = \sqrt{gh(2-\mu\operatorname{ctg}\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

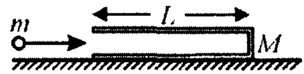
Было бы неправильно использовать закон сохранения энергии для всего участка пути, так как на нижней половине горки на санки будет действовать сила трения. Следовательно, в этой задаче следует применять именно закон *изменения* механической энергии.



1.4.13. Два небольших тела, находящиеся на концах горизонтального диаметра гладкой полусферы радиусом $R = 20$ см, соскальзывают без начальных скоростей навстречу друг другу. При столкновении тела «слипаются» и далее движутся как одно целое. Найти отношение n масс тел, если максимальная высота над нижней точкой полусферы, на которую поднимаются слипшиеся тела после столкновения, $h = 5$ см. Трение не учитывать.

Решение. Поскольку трение отсутствует, столкновение тел произойдет в нижней точке полусферы, причем модуль скорости каждого из тел перед столкновением $v = \sqrt{2gR}$. Обозначив через m_1 и m_2 массы тел до столкновения, а через u – модуль скорости составного тела, по закону сохранения импульса вдоль горизонтального направления в момент удара имеем: $m_1v - m_2v = (m_1+m_2)u$. Учитывая, что $u = \sqrt{2gh}$ и $m_1/m_2 = n$, получаем ответ: $n = \dfrac{1+\sqrt{h/R}}{1-\sqrt{h/R}} = 3$.

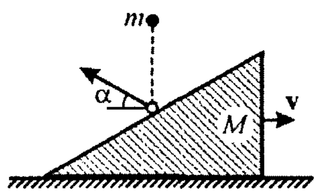
Так как по условию задачи тела имеют различные массы, возникает ошибочное впечатление, что столкновение тел произойдет не в нижней точке полусферы.



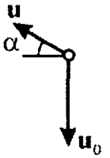
1.4.14. На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой $M = 90$ г и длиной $L = 0{,}5$ м, закрытая с одного торца. В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой $m = 10$ г со скоростью, направленной вдоль оси трубки. После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь S относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.

Решение. Пусть начальная скорость шарика v_0. Из законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе “шарик + трубка” следует, что $mv_0 = MV + mv$, $mv_0^2 = MV^2 + mv^2$, где V и v – скорости трубки и шарика после соударения. Из этой системы находим $V = \dfrac{2m}{M+m}v_0$, $v = \dfrac{m-M}{M+m}v_0$. Поскольку относительная скорость этих тел после удара $V_{\text{отн}} = V - v = v_0$, время, которое шарик движется после соударения внутри трубки, $\tau = \dfrac{L}{V_{\text{отн}}} = \dfrac{L}{v_0}$. За это время он проходит путь $S' = v|\tau = \dfrac{|m-M|}{M+m}L$. Полный путь, пройденный шариком, $S = L + S'$. Отсюда $S = L\left(1 + \dfrac{|m-M|}{M+m}\right) = 0{,}9$ м.

Заметим, что как правило, особые трудности вызывает определение пути, который шарик проходит внутри трубки. Следует обратить внимание на способ нахождения этой величины, предложенный в решении этой задачи.



1.4.15. На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой $M = 1$ кг с высоты $h = 50$ см падает резиновый шарик массой $m = 10$ г и отскакивает под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти скорость клина v после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим, трение между клином и столом не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



Решение. Пусть u_0 и u – модули скоростей шарика до и после соударения с клином, соответственно. Для тела, падающего без начальной скорости с высоты h, имеем: $u_0 = \sqrt{2gh}$. Из закона сохранения проекции импульса системы «шарик + клин» на горизонтальную ось, следует, что $mu\cos\alpha = Mv$. При упругом соударении шарика и клина сохраняется суммарная кинетическая энергия этих тел: $\frac{mu_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $v = m\cos\alpha\sqrt{\frac{2gh}{M(M + m\cos^2\alpha)}} \approx 2{,}7$ см/с.

При решении этой задачи надо понимать, что в вертикальном направлении на систему тел действуют внешние силы – сила тяжести и сила реакции стола. Значит, в данной задаче можно применять закон сохранения импульса лишь в проекции на горизонтальное направление.

1.4.16. Человек массой $M = 70$ кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой $m = 3{,}5$ кг. Какую работу A совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние $S = 0{,}2$ м? Коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Пусть v и u – скорости снежного кома и человека сразу после броска. Совершенная при броске работа потрачена на сообщение кинетической энергии как снежному кому, так и самому человеку: $A = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$. Считая бросок кратковременным, можно пренебречь импульсом силы трения за время броска. Поэтому в момент броска сохраняется суммарный импульс снежного кома и человека, откуда следует, что $mv = Mu$. Закон изменения механической энергии при движении человека после броска дает соотношение: $\frac{Mu^2}{2} = \mu MgS$. Объединяя записанные равенства, получаем ответ: $A = M\left(1 + \frac{M}{m}\right)\mu gS = 29{,}4$ Дж.

Заметим, что в этой задаче можно получить неверный ответ, если ошибочно считать, что совершенная при броске работа идет на сообщение кинетической энергии только снежку.

1.4.17.[E] Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 = 160$ м/с, пробивает стоящую на горизонтальной шероховатой поверхности коробку и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью αv_0, где $\alpha = 1/4$. Масса коробки в 12 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и поверхностью $\mu = 0{,}3$. На какое расстояние S переместится коробка к моменту, когда её скорость уменьшится на 20%?

Решение. Прежде чем начинать решать задачу, надо построить модель процесса пробивания коробки пулей. Для этого надо прежде всего понять, что время Δt пробивания коробки пулей очень мало – размер коробки, видимо, не более 1 м, а средняя скорость пули – около 100 м/с, так что $\Delta t \sim 0{,}01$ с. За это время скорость пули массой m уменьшается на величину $\Delta v \sim 100$ м/с, так что ее среднее ускорение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ составляет около 10^4 м/с^2, а ускорение коробки массой $12m$ под действием силы взаимодействия с пулей – примерно в десять раз меньше, то есть около 10^3 м/с$^2 \sim 1000g$! Это намного больше, чем ускорение $\mu g = 0{,}3g$, создаваемое силой трения при дальнейшем движении коробки. Таким образом, для системы «пуля + коробка» внешней силой трения коробки о шероховатую поверхность во время пробивания коробки пулей можно пренебречь по сравнению с внутренними силами взаимодействия пули и коробки в этом процессе, так что система является замкнутой в направлении движения пули, и можно применить закон сохранения импульса. Во время же движения коробки после удара силой трения пренебречь нельзя: приобретенная коробкой кинетическая энергия расходуется на работу против силы трения коробки о шероховатую поверхность.

Таким образом, можно записать закон сохранения импульса при ударе и закон изменения кинетической энергии после удара, обозначив через u_0 скорость коробки сразу после удара пули:

$$mv_0 = \alpha m v_0 - 12mu_0\,; \qquad \frac{12mu_0^2}{2} = \frac{12m(0{,}8u_0)^2}{2} + 12\mu m g S.$$

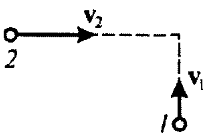
Из этих уравнений имеем:

$$u_0 = \frac{(1-\alpha)v_0}{12}, \qquad 0{,}18u_0^2 = \mu g S,$$

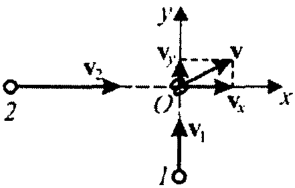
и для расстояния S, на которое переместится коробка к моменту, когда её скорость уменьшится на 20%, получаем ответ:

$$S = \frac{0{,}18(1-\alpha)^2 v_0^2}{12^2 \mu g} = 6 \text{ м}.$$

Следует обратить внимание на важный момент при решении этой задачи – построение модели процесса. Было бы полезным начинать решение любой задачи с подобного анализа ее условия.



1.4.18. Пластилиновые шарики имеют одинаковые массы m и взаимно перпендикулярные скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, лежащие в одной плоскости. В результате столкновения шарики слипаются и движутся как одно целое. Какое количество теплоты Q выделилось при столкновении, если $m = 1$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с.



Решение. Поскольку при столкновении шариков сохраняется импульс, в проекциях на оси OX и OY координатной системы, изображенной на рисунке, имеем: $mv_2 = 2mv_x$, $mv_1 = 2mv_y$. Здесь v_x и v_y – проекции скорости $\mathbf{v}$ тела, образованного слипшимися шариками после удара. Отсюда $v^2 = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2)$. По закону изменения механической энергии $Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{2mv^2}{2}$. Отсюда $Q = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Данная задача является классическим примером расчета изменения механической энергии тел в результате их абсолютно неупругого соударения. При решении таких задач, вообще говоря, было бы ошибкой определять конечную скорость шариков, как векторную сумму их первоначальных скоростей.

Задачи для самостоятельного решения

1.4.19. Из пушки производится выстрел таким образом, что дальность полета снаряда в $n = 2$ раза превышает максимальную высоту траектории. Считая известным модуль начального импульса снаряда $p_0 = 1000$ кг·м/с, определить модуль его импульса p в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $p = \dfrac{p_0}{\sqrt{1 + (16/n^2)}} = \dfrac{p_0}{\sqrt{5}} \approx 447$ кг·м/с.

1.4.20. Граната, брошенная под углом к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один из осколков упал на землю через время $t_1 = 0{,}5$ с после разрыва гранаты. Через какое время t_2 после разрыва окажется на земле второй осколок, упавший позднее первого, если разрыв гранаты произошел на высоте $h = 10$ м над поверхностью земли? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $t_2 = \dfrac{2h}{gt_1} = 4$ с.

1.4.21. На прямолинейном горизонтальном участке пути стоят $N = 5$ одинаковых вагонов. Промежутки между соседними вагонами одинаковы и равны $L = 30$ м. К крайнему вагону подкатывается еще один такой же вагон, имеющий скорость $v_0 = 2$ м/с. В результате N последовательных столкновений, в каждом из которых сталкивающиеся вагоны сцепляются вместе, все $N+1$ вагонов соединяются в один состав. Найти время τ между первым и последним столкновениями. Силами сопротивления движению вагонов пренебречь.

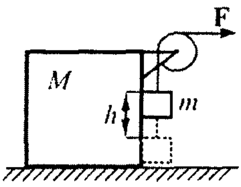
Ответ: $\tau = \dfrac{L(N^2 + N - 2)}{2v_0} = 210$ с.

1.4.22. Гиря массой $m = 1$ кг подвешена на веревке. За свободный конец веревки гирю начинают поднимать вертикально вверх. Какую работу A нужно совершить, чтобы поднять гирю на высоту $h = 2$ м за время $\tau = 3$ с? Считать, что сила натяжения веревки во время подъема груза постоянна. Веревку считать невесомой и нерастяжимой. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $A = mgh\left(1 + \frac{2h}{g\tau^2}\right) \approx 20{,}9$ Дж.

1.4.23. Два конькобежца с массами $m = 40$ кг и $M = 60$ кг встали на лед друг против друга, держа слегка натянутым легкий шнур. Затем один из них начинает укорачивать шнур. Какую работу он совершит к тому моменту, когда будет двигаться относительно шнура со скоростью v = 5 м/с? При расчете трением пренебречь.

Ответ: $A = \frac{mMv^2}{2(m + M)} = 300$ Дж.



1.4.24. На горизонтальной плоскости стоит кубик массой $M = 2$ кг, к верхней грани которого прикреплен легкий блок. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, на конце которой закреплен груз массой $m = 0{,}5$ кг, касающийся вертикальной грани кубика. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз на высоту $h = 10$ см, прикладывая к нити горизонтальную силу $F = 7$ Н? Считать, что трения нет, а кубик движется поступательно. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $A = Fh\left(1 + \frac{Fm}{(m + M)(F - mg)}\right) = 1{,}19$ Дж.

1.4.25. Однородный цилиндр массой $m = 100$ г и высотой $h = 16$ см висит внутри вертикального цилиндрического стакана на невесомой нерастяжимой нити, прикрепленной в центре его верхнего основания. В стакан наливают столько жидкости, что ее уровень совпадает с верхним основанием цилиндра. Плотность жидкости в 2 раза меньше плотности материала цилиндра. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы за нить вытащить цилиндр из жидкости? Радиус стакана в 2 раза больше радиуса цилиндра. Силами поверхностного натяжения пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $A = \dfrac{9mgh}{16} = 0{,}09$ Дж.

1.4.26. На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой $M = 9$ г с насаженной на него маленькой бусинкой массой $m = 1$ г. В начальный момент времени бусинка имеет скорость $v = 1$ м/с, а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии W бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

Ответ: $W = \dfrac{mv^2}{2}\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)^2 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ Дж.

1.4.27. Двигатель автомобиля массой $m = 2$ т, движущегося по горизонтальной дороге со скоростью $v = 72$ км/ч, развивает мощность $N = 14$ кВт. Какую мощность должен развивать двигатель этого автомобиля при движении с той же скоростью по дороге, поднимающейся вверх под углом $\alpha = 5°$ к горизонту? Считать, что в обоих случаях на преодоление сил сопротивления расходуется одна и та же мощность. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

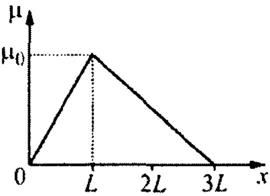
Ответ: $N_1 = N + mgv\sin\alpha \approx 51$ кВт.

1.4.28. Две одинаковые пластины массой m каждая скреплены невесомой пружиной и установлены на горизонтальной поверхности. На верхней пластине лежит груз массой M. При каком соотношении масс пластины и груза нижняя пластина оторвется от поверхности, если верхний груз сбить резким ударом в горизонтальном направлении? Трение между пластиной и грузом отсутствует. Для пружины справедлив закон Гука.

Ответ: $\dfrac{M}{m} > 2$.

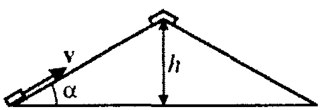
1.4.29. Игрушечная ракета стартует с горизонтальной площадки вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и с включенным двигателем летит вдоль ветви параболы с вершиной в точке старта. При этом сила тяги двигателя постоянна и все время направлена под углом 45° к горизонту. Через некоторое время двигатель выключается. Найти время τ работы двигателя с момента старта, если скорость ракеты в момент падения на ту же площадку направлена под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Изменением массы ракеты и влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $\tau = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{(1-\sin\alpha)g} = 1$ с.



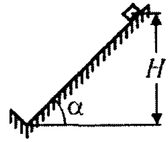
1.4.30. Маленькая шайба, скользя по гладкой горизонтальной плоскости вдоль оси X, попадает на шероховатый участок этой плоскости. Коэффициент сухого трения μ на этом участке изменяется так, как показано на рисунке. Максимальное значение μ равно $\mu_0 = 0{,}5$. Найти модуль v_0 начальной скорости шайбы, если она остановилась в точке $x_0 = 2L = 20$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $v_0 = \sqrt{\dfrac{5\mu_0 g L}{2}} \approx 11$ м/с.



1.4.31. Кирпич, лежащий на краю крыши дома, толкнули вверх вдоль ската со скоростью $v = 10$ м/с. После упругого удара о конек кирпич соскользнул обратно и остановился на краю крыши. Найти коэффициент трения μ между кирпичом и поверхностью крыши, если конек находится на высоте $h = 2{,}5$ м от края крыши, а угол наклона крыши к горизонту $\alpha = 30°$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $\mu = \dfrac{v^2}{4gh}\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}58$.



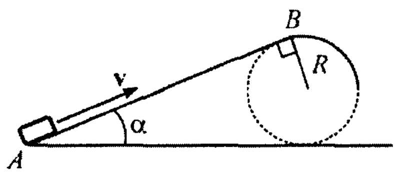
1.4.32. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает без начальной скорости небольшое тело и ударяется о выступ, перпендикулярный наклонной плоскости. Считая удар о выступ абсолютно упругим, найти, на какую высоту h поднимется тело после удара. Начальная высота тела $H = 1$ м, коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.

Ответ: $h = H \cdot \dfrac{1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha} \approx 0{,}33$ м.

1.4.33. На горизонтальной плоскости, плавно переходящей в наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, на расстоянии $L = 2$ м от наклонной плоскости находится маленькая шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскости равен $\mu = 0{,}25$, на участке сопряжения плоскостей трение отсутствует. Шайбе толчком сообщают скорость $v = 5$ м/с в сторону наклонной плоскости в направлении, перпендикулярном линии сопряжения плоскостей. На каком расстоянии l от начального положения шайба окончательно остановится, если участок сопряжения по длине много меньше L? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $l = L\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\mu + \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{v^2}{2\mu g} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu} = 0{,}2$ м.

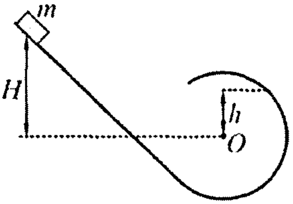
1.4.34.[E] Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки A (см. рисунок). В точке B наклонная



плоскость без излома переходит в наружную поверхность горизонтальной трубы радиусом R. Если в точке A скорость шайбы превосходит $v_0 = 4$ м/с, то в точке B шайба отрывается от опоры.

Длина наклонной плоскости $AB = L = 1$ м, угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой $\mu = 0{,}2$. Найдите внешний радиус трубы R.

Ответ: $R = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha} - 2L(\mu + \operatorname{tg}\alpha) \approx 0{,}3$ м.



1.4.35. Небольшая шайба массой $m = 100$ г соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в желоб в форме дуги окружности, плоскость которой вертикальна (см. рисунок). Найти работу сил сопротивления, если точка начала соскальзывания и точка отрыва от желоба расположены на высотах $H = 2{,}6$ м и $h = 0{,}4$ м над центром окружности. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $A = -mg\left(H - \dfrac{3h}{2}\right) = -2$ Дж .

1.4.36. Опираясь о барьер катка, мальчик бросил камень горизонтально со скоростью $v_1 = 5$ м/с. Какова будет скорость v_2 камня относительно мальчика, если он бросит камень горизонтально, совершив при броске прежнюю работу, но стоя на гладком льду? Масса камня $m = 1$ кг, масса мальчика $M = 50$ кг. Трением о лед пренебречь.

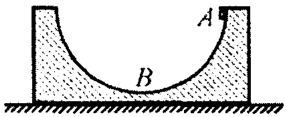
Ответ: $v_2 = v_1\sqrt{1 + \dfrac{m}{M}} \approx 5{,}05$ м/с.

1.4.37. Два шарика массами $m_1 = 2$ г и $m_2 = 6$ г лежат на гладком горизонтальном столе. Между шариками располагается легкая пружина. Если сблизить шарики, сжав пружину, а затем, удерживая на месте шарик массой m_2, отпустить шарик массой m_1, то он отлетает со скоростью $v_0 = 2$ см/с. С какими скоростями v_1 и v_2 разлетятся шарики, если сблизить их до расстояния, при котором сжатие пружины окажется в $n = 2$ раза меньше, чем в первом случае, и отпустить оба шарика одновременно?

Ответ: $v_1 = \frac{v_0}{n}\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}} \approx 0{,}87$ см/с,

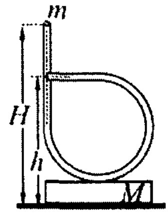
$$v_2 = \frac{v_0}{n}\sqrt{\frac{m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 0{,}29 \text{ см/с}.$$

1.4.38. Сферическая чашка массой $M = 200$ г покоится на гладкой горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности чашки из положения A начинает скользить без начальной скорости маленький брусок массой $m = 20$ г. Какую скорость v будет иметь чашка в тот момент, когда брусок достигнет наинизшей точки (положение B), если радиус чашки $R = 8$ см? Трением между всеми поверхностями пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: $v = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m + M)}} \approx 12$ см/с.

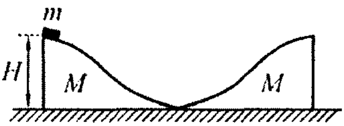
1.4.39. На горизонтальной плоскости стоит подставка, на которой укреплена тонкая жесткая изогнутая трубка, как показано на рисунке. Масса подставки с трубкой равна $M = 400$ г. Верхний конец трубки расположен на высоте $H = 1$ м над плоскостью. Высота горизонтального участка трубки равна $h = 0{,}75$ м, а его конец лежит на одной вертикали с серединой верхнего конца. В верхний конец опускают без начальной скорости небольшое тело массой $m = 20$ г. На каком расстоянии по горизонтали от исходной точки тело упадет на плоскость при отсутствии сил трения?



Ответ: $x = 2\sqrt{\frac{h(H - h)}{1 + (m/M)}} \approx 84{,}5$ см.

1.4.40. С неподвижной гладкой горки, плавно переходящей в горизонтальную плоскость, с высоты $H = 90$ см соскальзывает без начальной скорости небольшая шайба массой $m = 200$ г. На плоскости стоит другая гладкая горка массой $M = 1$ кг высотой $H_1 > H$, которая может перемещаться по плоскости без трения. На какую максимальную высоту h поднимется по неподвижной горке шайба после того, как она первый раз соскользнет с подвижной горки?

Ответ: $h = \left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)^2 H = 0{,}4$ м.



1.4.41. На гладкой горизонтальной плоскости стоят две одинаковые гладкие горки высотой $H = 1$ м и массой $M = 1$ кг каждая. На вершине одной из них находится маленькая шайба массой $m = 1$ г (см. рисунок). Шайба соскальзывает без начальной скорости в направлении второй горки. Найдите скорости горок после завершения процесса всех столкновений. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{m}{M} gH} = 0{,}1$ м/с.

1.4.42. В закрепленной квадратной коробке с вертикальными стенками на горизонтальном дне в центре лежит маленькая гладкая упругая шайба. Вторая такая же шайба находится в одном из углов коробки. Если вторую шайбу ударить так, чтобы она испытала нелобовой удар с первой, то скорость второй шайбы уменьшится в $n = 2$ раза, и она столкнется с коробкой через время $\tau = 2$ с после удара о первую шайбу. Через какое время после соударения первая шайба столкнется со стенкой коробки?

Ответ: $\Delta t = \dfrac{\tau}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 1{,}15$ с.

1.4.43.[E] Тележка массой $m_1 = 0{,}8$ кг движется по инерции со скоростью $v_0 = 2{,}5$ м/с. На тележку с высоты $h = 50$ см вертикально падает кусок пластилина массой $m_2 = 0{,}2$ кг и прилипает к ней. Рассчитайте энергию, которая перешла во внутреннюю при этом ударе.

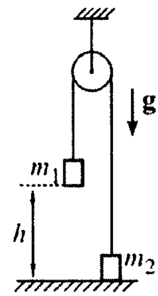
Ответ: $Q = \dfrac{m_1 v_0^2}{2} + m_2 g h - \dfrac{m_1^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)} = 1{,}5$ Дж.

1.4.44. Два маленьких шарика массами $m = 1$ г и $2m$ движутся в одной плоскости так, что их импульсы направлены взаимно перпендикулярно, а модули импульсов равны соответственно $p = 2 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с и $p/2$. Шарики сталкиваются, причем после соударения модуль импульса шарика массой m становится равным $p/2$, а модуль импульса шарика массой $2m$ становится равным p. Какое количество теплоты Q выделилось при соударении шариков? Действием всех внешних сил пренебречь.

Ответ: $Q = \dfrac{3p^2}{16m} = 0{,}075$ Дж.

1.4.45. На гладком горизонтальном столе покоится маленькая шайба массой $m = 10$ г. На нее налетает скользящая по столу вторая такая же шайба. После частично упругого нелобового удара шайбы разлетаются со скоростями, модули которых равны v_1 и v_2. Найти угол разлета шайб, если при ударе выделилось количество теплоты Q.

Ответ: $\alpha = \arccos \dfrac{Q}{m v_1 v_2} = 60°$.



1.4.46. В машине Атвуда (см. рисунок) массы грузов равны $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 1$ кг, блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжёлый груз m_1 удерживают на высоте $h = 1$ м над горизонтальной плоскостью, а груз m_2 стоит на этой плоскости, причём отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз m_1 после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, блок находится достаточно далеко от грузов.

Ответ: $h_1 = h\left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 = 0{,}16$ м.

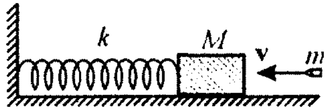
1.4.47. На гладком горизонтальном столе неподвижно стоит клин массой $M=400$ г. Шероховатая наклонная поверхность клина плавно сопрягается с горизонтальной поверхностью стола. По столу в направлении клина со скоростью $v=1$ м/с скользит маленькая шайба массой $m=100$ г. Шайба, въехав на клин, поднимается по его наклонной поверхности на максимальную высоту $h=3$ см над столом. Найти количество теплоты, которое при этом выделяется. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: $Q = \dfrac{mv^2}{2}\cdot\dfrac{M}{m+M} - mgh = 0{,}01$ Дж.

1.4.48. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой $M=1$ кг. На конец доски кладут шайбу массой $m=0{,}25$ кг, которой ударом сообщают скорость $v=5$ м/с вдоль доски к ее противоположному концу. Коэффициент трения шайбы о доску равен $\mu=0{,}8$. На какое расстояние от исходного положения переместится по доске шайба, если известно, что шайба не соскальзывает с доски? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: $s = \dfrac{Mv^2}{2\mu g(m+M)} = 1{,}25$ м.

1.4.49. На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В центр бруска попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определить скорость пули v, если максимальное сжатие пружины после удара составило $\Delta l = 30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.

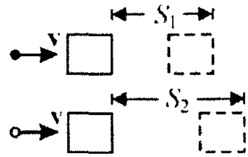


Ответ: $v = \dfrac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

1.4.50.[E] Кусок пластилина сталкивается со скользящим навстречу по горизонтальной поверхности стола бруском и прилипает к нему. Скорости пластилина и бруска перед ударом направлены противоположно и равны $v_{\text{пл}} = 15$ м/с и $v_{\text{бр}} = 5$ м/с. Масса бруска в $n = 4$ раза больше массы пластилина. Коэффициент трения скольжения между бруском и столом равен $\mu = 0{,}17$. На какое расстояние переместятся слипшиеся брусок с пластилином к моменту, когда их скорость уменьшится на $\alpha = 30\%$? Считать ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $S = \dfrac{\alpha(2-\alpha)}{2\mu g}\left(\dfrac{nv_{\text{бр}} - v_{\text{пл}}}{n+1}\right)^2 = 0{,}15$ м.

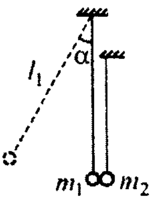
1.4.51. Два одинаковых бруска покоятся на шероховатой горизонтальной поверхности. В один из брусков попадает пластилиновый шарик, летящий с некоторой скоростью, и прилипает к нему. В другой брусок попадает металлический шарик такой же массы, летящий с такой же скоростью, что и пластилиновый. После упругого удара о брусок металлический шарик отскакивает назад со скоростью, вдвое меньшей начальной. Найти отношение n путей, пройденных брусками после удара, считая их движение поступательным.



Ответ: $n = \dfrac{1}{4}$.

1.4.52. В лежащий на гладкой горизонтальной плоскости кубик массой $M = 1$ кг попадает летевшая со скоростью $v = 200$ м/с пуля массой $m = 20$ г. Скорость пули была направлена вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр кубика, перпендикулярно одной из его боковых граней. Сколько тепла выделилось бы, если бы пуля вылетела из кубика со скоростью в $n = 2$ раза меньше v, а изменением потенциальной энергии кубика и пули можно было бы пренебречь?

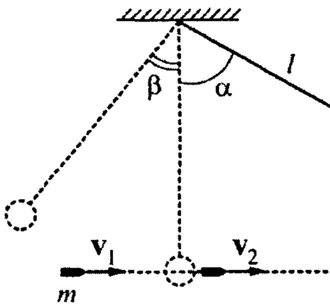
Ответ: $Q = \left(1 - \frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{m}{M}\right)\frac{mv^2}{2} \approx 300$ Дж.



1.4.53. Два маленьких шарика подвешены на нитях так, что в положении равновесия нити вертикальны, а шарики соприкасаются друг с другом, и их центры находятся на одной высоте. Длина нити подвеса левого шарика $l_1 = 10$ см, отношение масс шариков $m_2 / m_1 = n = 3$. Левый шарик отклоняют на некоторый угол α от вертикали и отпускают без начальной скорости. Определить величину α, если максимальная высота, на которую поднимается левый шарик после первого соударения с правым шариком, $h_1 = 1{,}25$ см. Нити считать невесомыми и нерастяжимыми, соударение шариков – абсолютно упругим.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{h_1}{l_1}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2\right) = 60°$.

1.4.54.[E] Шар массой $M = 1$ кг, подвешенный на нити длиной $l = 90$ см, отводят от положения равновесия на угол $\alpha = 60°$



и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая навстречу шару. Она пробивает его и продолжает двигаться горизонтально. Определите изменение скорости пули в результате попадания в шар, если он, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол $\beta = 39°$. Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, $\cos 39° \approx \frac{7}{9}$.

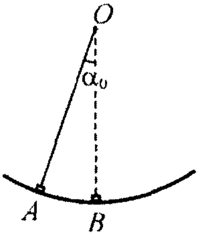
Ответ: $\Delta v = \frac{M}{m}\left(\sqrt{2gl(1-\cos\beta)} - \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}\right) = -100$ м/с.

1.4.55. Шарик массой $M = 100$ г висит на невесомой нерастяжимой нити длиной $L = 1$ м. В него попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г, которая застревает в шарике. Скорость пули такова, что после этого шарик на нити делает полный оборот по окружности в вертикальной плоскости. Найти, какое количество теплоты выделилось при застревании пули в шарике. Влиянием воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $Q > \frac{5M(m+M)gL}{2m} = 27{,}5$ Дж.

1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Примеры решения задач и методические рекомендации

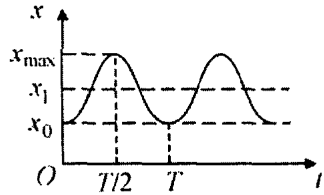


1.5.1. По гладкому желобу, имеющему форму дуги окружности, из точки A без начальной скорости начинает скользить маленький брусок. Когда этот брусок проходит половину пути до нижней точки желоба B, из точки A начинает скользить без начальной скорости второй такой же брусок. Найти, какой угол α будет составлять с вертикалью линия, соединяющая второй брусок с центром дуги – точкой O, в момент, когда первый брусок достигнет точки B, если $\angle AOB$ известен и равен $\alpha_0 = 0{,}1$ рад.

Решение. Будем отсчитывать время t от момента начала движения первого бруска. Так как по условию задачи угол $\alpha_0 << 1$ рад, то законы движения обоих брусков по виду совпадают с законом движения математического маятника. Поэтому при движении первого бруска угол α_1, задающий его положение по отношению к вертикали OB, изменяется во времени по закону $\alpha_1 = \alpha_0 \cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ – круговая частота, R – радиус желоба. В момент t_1, когда начинает движение второй брусок, $\alpha_1(t_1) = \dfrac{\alpha_0}{2} = \alpha_0 \cos\omega t_1$, откуда $\omega t_1 = \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, закон движения второго бруска, который начинает движение с запаздыванием по отношению к первому, имеет вид: $\alpha_2 = \alpha_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Когда первый брусок в момент времени t_2 достигает точки B, $\omega t_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Поскольку искомый угол $\alpha = \alpha_2(t_2)$, то ответ имеет вид: $\alpha = \alpha_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\alpha_0\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}087$ рад.

Полезно схематически изобразить графики зависимостей углов, задающих положение брусков, от времени.

1.5.2. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью $k=10$ Н/м подвешена гиря массой $m=1$ кг. В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением $a=1$ м/с^2. Какой путь S пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины первый раз станет максимальной?



Решение. При решении задачи будем использовать инерциальную систему отсчета, связанную с неподвижной землей, а также вспомогательную систему отсчета, связанную с ускоренно движущейся кабиной лифта. Введем направленную вертикально вниз вспомогательную координатную ось OX, связанную с кабиной лифта, и совместим начало этой оси с нижним концом недеформированной пружины. Когда кабина неподвижна, координата гири в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$. В момент начала движения кабины положение равновесия гири скачком смещается вниз, и ее координата относительно лифта в равновесии становится равной $x_1 = m(g+a)/k$. В результате начинаются гармонические колебания гири относительно кабины лифта, причем их период равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ и не зависит от того, покоится кабина или движется. График зависимости координаты гири x от времени t в системе отсчета, связанной с кабиной, изображен на рисунке, на котором $t=0$ соответствует моменту начала движения кабины. Как видно из рисунка, время τ, за которое длина пружины достигает максимального значения, составляет половину периода колебаний гири: $\tau = T/2$. Путь, пройденный кабиной относительно земли за это время, равен $S = \dfrac{a\tau^2}{2}$.

Объединяя записанные выражения, получаем: $S = \dfrac{\pi^2 am}{2k}$. Подставляя в эту формулу заданные в условии задачи числа и проверяя размерность, находим ответ: $S = \dfrac{3{,}14^2 \cdot 1\,\text{м/с}^2 \cdot 1\,\text{кг}}{2\cdot(10\,\text{Н/м})} \approx 0{,}5$ м.

При решении этой задачи следует отметить, что период гармонических колебаний *пружинного* маятника зависит только от характеристик этого маятника – массы груза и коэффициента жесткости пружины, и не зависит от ускорения свободного падения. Однако стоит подчеркнуть, что при неизменном периоде колебаний положение равновесия, вокруг которого происходят колебания, изменяется, как только система начинает двигаться с ускорением. Следует обратить особое внимание на то, что подобные рассуждения для математического маятника неправильны. В связи с этим было бы полезным решить эту задачу, заменив пружинный маятник на математический.

1.5.3.^{E} Груз массой $m = 2$ кг, закреплённый на пружине жёсткостью $k = 200$ Н/м, совершает гармонические колебания. Максимальное ускорение груза при этом равно $a_{max} = 10$ м/с^2. Какова максимальная скорость груза?

Решение. Будем использовать для решения задачи инерциальную систему отсчета, связанную с землей, которую будем считать неподвижной. Введем направленную вдоль оси пружины координатную ось OX, начало которой совместим с положением равновесия груза. Тогда при надлежащем выборе начала отсчета времени t и положительного направления оси OX координата груза x изменяется со временем по гармоническому закону: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A – амплитуда колебаний, ω – их круговая частота, φ_0 – начальная фаза. Зависимости скорости v и ускорения a груза от времени можно найти при помощи дифференцирования функции $x(t)$ по времени: $v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Из полученных формул видно, что максимальная скорость груза при колебаниях равна по модулю $v_{max} = \omega A$, а модуль максимального ускорения составляет $a_{max} = \omega^2 A$. Отсюда следует, что $v_{max} = \dfrac{a_{max}}{\omega}$. Учитывая, что для пружинного маятника $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, находим: $v_{max} = a_{max}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Подставляя числа и проверяя размерность, получаем ответ: $v_{\max} = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sqrt{\dfrac{2\,\text{кг}}{200\,\text{Н/м}}} = 1$ м/с.

При решении этой задачи важно понимать, что максимальные значения скорости и ускорения при гармонических колебаниях однозначно связаны с амплитудой колебаний, причем эта связь может быть найдена из закона движения $x(t)$ путем его дифференцирования.

1.5.4. Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 0{,}1$ рад и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найти максимальную величину $v_{y\max}$ вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника $l = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

Решение. Угол отклонения маятника от вертикали изменяется во времени по закону: $\alpha = \alpha_0 \cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ – круговая частота. Следовательно, модуль линейной скорости маятника $|v| = l|\dot{\alpha}|$ зависит от времени следующим образом: $|v| = \alpha_0 l\omega|\sin\omega t|$. Модуль вертикальной составляющей скорости маятника равен

$$|v_y| = |v\sin\alpha| \approx |v\alpha| = \alpha_0^2 l\omega|\sin\omega t\cos\omega t| = \frac{\alpha_0^2 l\omega}{2}|\sin 2\omega t|.$$

Максимальное значение этой величины достигается при $|\sin 2\omega t| = 1$. Отсюда $v_{y\max} = \dfrac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с.

Решение этой задачи подразумевает анализ полученной зависимости модуля вертикальной составляющей скорости маятника от времени.

1.5.5. Тело массой $m = 0{,}1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. Тело смещают от положения равновесия на расстояние $x_0 = 10$ см и отпускают без начальной скорости. Найти среднюю скорость тела $v_{ср}$ за время, в течение которого оно проходит из крайнего положения путь $x_0/2$.

Решение. Пусть в момент, когда тело, смещенное от положения равновесия на расстояние x_0, отпускают без начальной скорости, $t = 0$. Тогда координата тела будет меняться со временем по закону: $x(t) = x_0 \cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – круговая частота колебаний. Обозначив через t_0 время, за которое тело проходит от крайнего положения путь $x_0/2$, имеем: $\dfrac{x_0}{2} = x_0 \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t_0$, откуда $t_0 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Средняя скорость тела за время t_0 определяется выражением: $v_{ср} = \dfrac{x_0}{2t_0}$. Отсюда $v_{ср} = \dfrac{3x_0}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \approx 0{,}48$ м/с.

Распространенной ошибкой при решении этой задачи является определение средней скорости как среднего арифметического из значений скорости в начальный и конечный моменты времени.

1.5.6.[E] Смещение груза пружинного маятника меняется с течением времени по закону $x = A\sin(2\pi t/T)$, где период $T = 1$ с. Через какое минимальное время, начиная с момента $t = 0$, потенциальная энергия маятника достигнет половины своего максимального значения?

Решение. Воспользуемся выражением для потенциальной энергии пружины, к которой прикреплен груз маятника. В начальный момент времени, когда запасенная в пружине потенциальная энергия равна нулю, пружина не растянута. В момент максимального растяжения пружины ее удлинение равно A, а потенциальная энергия при этом равна $U_0 = \dfrac{kA^2}{2}$, где k – коэффициент жесткости пружины. В интересующий нас момент времени t потенциальная энергия пружины составляет

$$U_1 = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(2\pi t/T)}{2}.$$

По условию задачи $U_1 = U_0/2$. Отсюда получаем уравнение: $\sin^2(2\pi t/T) = 1/2$. Минимальный отличный от нуля корень этого уравнения $t = T/8 = 0{,}125$ с. Именно через такой промежуток времени, начиная с момента $t = 0$, потенциальная энергия маятника достигнет половины своего максимального значения.

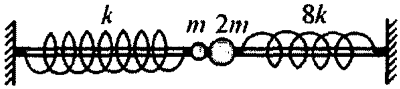
Следует отметить, что для решения этой задачи необходимо ввести вспомогательную величину – коэффициент жесткости пружины – который не задан, но в процессе вычислений сокращается и в ответ не входит.

1.5.7. На гладком горизонтальном столе лежит деревянный брусок, прикрепленный пружиной к вертикальной стенке. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определить жесткость пружины k, если известно, что время, в течение которого сжималась пружина после попадания пули в брусок, равно $T = 0{,}1$ с, а отношение количества теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, к начальной кинетической энергии пули равно $\alpha = 0{,}9$. Трением бруска о стол, а также массой пружины пренебречь.

Решение. Обозначим через v скорость пули перед ударом, а через M – массу бруска. Из закона сохранения импульса и закона изменения механической энергии следуют равенства: $mv = (M+m)u$, $\frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + Q$, где u – скорость пули и бруска после соударения, Q – количество теплоты, выделившееся при взаимодействии пули с бруском, причем по условию $Q = \alpha\frac{mv^2}{2}$. Время T, в течение которого сжималась пружина, равно четверти периода колебаний тела массой $(M+m)$ на пружине жесткостью k , т.е. $T = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{M+m}{k}}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $k = \frac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25$ Н/м.

В этой задаче использовать закон сохранения энергии для определения скорости бруска после попадания в него пули было бы неправильно, так как удар является неупругим. Кроме того, важно понимать, что интервал времени, в течение которого сжималась пружина, равен именно четверти периода колебаний (а не половине), так как изначально пружина была недеформирована.

1.5.8. Два шарика массами $m = 100$ г и $2m$ прикреплены к пружинам жесткостями $k = 10$ Н/м и $8k$ соответственно и надеты



на гладкий горизонтальный стержень. Свободные концы пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия пружины не деформированы, а шарики касаются друг друга (см. рисунок). Шарик массой m отводят влево на небольшое расстояние и отпускают без начальной скорости. Найти время τ между первым и вторым соударениями шариков, считая их абсолютно упругими.

Решение. Пусть скорость шарика массой m перед ударом равна v_0. Из законов сохранения импульса и энергии при упругом столкновении шариков вытекают равенства: $mv_0 = mv_1 + 2mv_2$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2}$. Отсюда скорости шариков массами m и $2m$, соответственно, $v_1 = -\frac{v_0}{3}$, $v_2 = \frac{2v_0}{3}$. Направив координатную ось OX вправо и совместив начало координат с положением равновесия, для координат шариков имеем: $x_1 = -A_1 \sin\omega_1 t$, $x_2 = A_2 \sin\omega_2 t$, где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний шариков, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{8k}{2m}} = 2\omega_1$ – круговые частоты колебаний. Скорости колеблющихся шариков определяются по формулам: $\dot{x}_1 = -A_1\omega_1 \cos\omega_1 t$, $\dot{x}_2 = A_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Полагая в этих формулах $t = 0$ и используя значения скоростей v_1 и v_2, получаем, что $A_1 = \frac{v_0}{3\omega_1}$, $A_2 = \frac{2v_0}{3\omega_2}$. Отсюда следует, что $A_1 = A_2 = A$. Второе столкновение шариков произойдет в момент, когда $x_1 = x_2$.

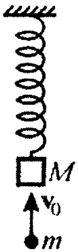
Имеем: $-A\sin\omega_1\tau = A\sin 2\omega_1\tau$, или $-\sin\omega_1\tau = 2\sin\omega_1\tau\cdot\cos\omega_1\tau$. Отсюда $\cos\omega_1\tau = -\frac{1}{2}$, или $\omega_1\tau = \frac{2\pi}{3}$. Тогда $\tau = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}21$ с.

Важным моментом при решении этой задачи является правильная запись законов движения шариков. Кроме того, следует пояснить, что момент времени $t = 0$ соответствует моменту первого соударения шаров.

1.5.9. Груз массой $M = 1$ кг подвешен на пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусок массой $m = 0{,}1$ кг, а затем отпускают. С какой максимальной силой $F_{\max}$ брусок будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

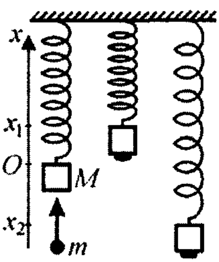
Решение. Из условия равновесия неподвижно висящего груза $kx_0 = Mg$ следует, что удлинение пружины при этом равно $x_0 = \frac{Mg}{k}$, где k – жесткость пружины. Совместим начало отсчета потенциальной энергии с концом недеформированной пружины. Учитывая, что при максимальном растяжении пружины ($x = x_{\max}$) скорость груза с бруском обращается в нуль, запишем закон сохранения энергии: $\frac{kx_0^2}{2} - (M+m)gx_0 = \frac{kx_{\max}^2}{2} - (M+m)gx_{\max}$. Подставляя сюда x_0, находим $x_{\max} = \frac{(M+2m)g}{k}$. Запишем далее уравнения движения для груза с бруском и отдельно для бруска: $(M+m)a=(M+m)g-kx$, $ma=mg-F$. Отсюда сила, с которой груз действует на брусок, $F=\dfrac{mkx}{M+m}$. Максимальное значение эта сила принимает при $x=x_{\max}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $F_{\max}=mg\dfrac{M+2m}{M+m}\approx 1{,}1$ Н.

Было бы полезным решить эту задачу, изменив положение начала отсчета потенциальной энергии, выбрав его, например, в положении равновесия системы.



1.5.10. Брусок массой $M=100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k=1$ Н/м. Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой $m=1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0=2{,}5$ м/с, и прилипает к бруску. Найти амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Решение. Выберем начало отсчета в положении равновесия бруска до прилипания шарика, ось OX направим вверх. В этом состоянии пружина растянута на величину $x_0=Mg/k$. По закону



сохранения импульса в момент прилипания шарика имеем: $mv_0=(M+m)u$, откуда $u=\dfrac{mv_0}{M+m}$. В точках максимального смещения от нового положения равновесия скорость бруска и шарика равна нулю. Из закона сохранения механической энергии следует равенство:

$$\frac{(M+m)u^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}=(M+m)gx+\frac{k(x-x_0)^2}{2}.$$

Подставляя в это равенство найденные ранее значения x_0 и u, получаем квадратное уравнение относительно x:

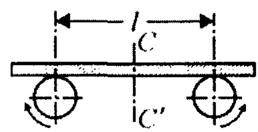
$$x^2 + \frac{2mg}{k}x - \frac{m^2 v_0^2}{k(M+m)} = 0.$$

Разрешая это уравнение, получаем два корня, которые соответствуют координатам верхней и нижней точек движения бруска с шариком: $x_{1,2} = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{m^2 v_0^2}{k(M+m)}}$. Поскольку амплитуда колебаний равна $A = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, ответ имеет вид:

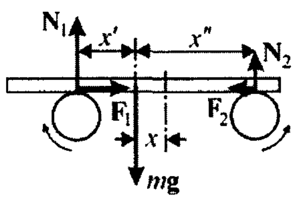
$$A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{k}{M+m}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3 \text{ см}.$$

Решение этой задачи содержит три важных момента, на которые следует обратить особое внимание: во-первых, выбор положения начала отсчета системы координат, во-вторых, объяснение двух значений возможной координаты бруска, и, в-третьих, определение амплитуды колебаний, как половины их размаха.

1.5.11. На двух быстро вращающихся в противоположные стороны валиках лежит горизонтально однородная доска. Расстояние между осями валиков $l = 20$ см, коэффициент трения между валиками и доской $\mu = 0{,}2$. Показать, что если в начальный момент времени центр тяжести доски смещен относительно средней линии CC', то предоставленная самой себе доска будет совершать гармонические колебания. Найти период T этих колебаний. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



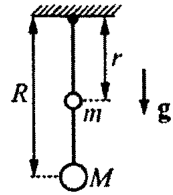
Решение. Пусть доска смещена от положения равновесия влево на расстояние x. Силы, действующие на доску при



этом, изображены на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести (m – масса доски), $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ – нормальные к доске составляющие сил реакции валиков, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – силы трения скольжения, причем $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$. На рисунке использованы также обозначения: $x' = \frac{l}{2} - x$, $x'' = \frac{l}{2} + x$. В проекции на вертикальное направление сумма сил равна нулю (исходя из условия равновесия доски в проекции на это направление), откуда следует, что $N_1 + N_2 = mg$. Уравнение моментов, записанное относительно мгновенного положения центра тяжести доски, имеет вид: $N_1\left(\frac{l}{2} - x\right) = N_2\left(\frac{l}{2} + x\right)$. Из записанной системы уравнений находим: $N_1 = \frac{mg(l + 2x)}{2l}$, $N_2 = \frac{mg(l - 2x)}{2l}$. Сумма сил трения скольжения направлена вправо и по модулю равна $F = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2) = \frac{2\mu mg}{l}x$. Поэтому уравнение движения доски $m\ddot{x} = -\frac{2\mu mg}{l}x$ имеет вид уравнения гармонических колебаний с круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$. Учитывая, что период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}} \approx 1{,}4$ с.

Важно отметить, что при решении этой задачи могут возникнуть трудности, связанные с определением направления сил сухого трения, действующих на доску. Следует помнить, что эти силы всегда направлены противоположно возможному перемещению одного тела относительно другого. Кроме того, будет полезным напомнить общий вид уравнения движения тела, совершающего свободные гармонические колебания: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

1.5.12. Найти период малых колебаний системы, состоящей из жесткой невесомой штанги, верхний конец которой закреплен на шарнире, и двух грузов малых размеров массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг, закрепленных на штанге на расстояниях $r = 0{,}5$ м и $R = 1$ м от шарнира. Трением пренебречь, $g = 10$ м/с^2.



Решение. Применим для решения этой задачи следующий прием. Представим себе, что изображенный на рисунке маятник вывели из положения равновесия, сообщив ему некоторую суммарную энергию E_0 так, что в результате начались колебания системы с малой амплитудой. Пусть в некоторый момент времени нижний груз оказался смещенным из положения равновесия на малую величину x и двигался в этот момент со скоростью v. Тогда угол, который составляет в этот момент штанга с вертикалью, равен $\alpha = x/R$. При этом смещение верхнего груза из положения равновесия равно $s = r\alpha = \dfrac{r}{R}x$, а его скорость равна $u = \dfrac{r}{R}v$.

Кинетическая энергия маятника в рассматриваемый момент времени равна сумме кинетических энергий нижнего и верхнего грузов:

$$W = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2R^2}v^2 = \frac{v^2}{2R^2}(MR^2 + mr^2).$$

Потенциальная энергия системы в этот момент складывается из потенциальных энергий взаимодействия грузов с Землей: $U = MgR(1-\cos\alpha) + mgr(1-\cos\alpha)$. При записи этого выражения мы считали, что $U = 0$ в положении равновесия системы. Так как угол отклонения штанги от вертикали мал ($\alpha \ll 1$ рад), то для вычисления косинуса можно воспользоваться приближенной формулой: $\cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$. Тогда

$$U = MgR(1-\cos\alpha) + mgr(1-\cos\alpha) \approx$$
$$\approx \frac{MgR}{2}\alpha^2 + \frac{mgr}{2}\alpha^2 = \frac{gx^2}{2R^2}(MR + mr).$$

Так как по условию задачи трения нет, то полная механическая энергия системы сохраняется:

$$W+U=\frac{v^2}{2R^2}\left(MR^2+mr^2\right)+\frac{gx^2}{2R^2}\left(MR+mr\right)=E_0=\text{const}.$$

Продифференцируем это уравнение по времени t, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции. Поскольку $\frac{d}{dt}(v^2)=2v\frac{dv}{dt}=2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d}{dt}(x^2)=2x\frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{MR^2+mr^2}{R^2}\cdot v\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{R^2}(MR+mr)xv=0.$$

Полученное уравнение можно переписать в виде:

$$\ddot{x}+\frac{g(MR+mr)}{MR^2+mr^2}x=0.$$

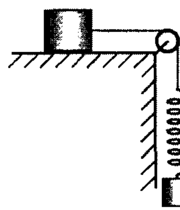
В результате получилось уравнение гармонических колебаний $\ddot{x}+\omega^2x=0$ с круговой частотой $\omega=\sqrt{\frac{g(MR+mr)}{MR^2+mr^2}}$. Следовательно, искомый период малых колебаний данной механической системы равен $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mr^2+MR^2}{g\left(mr+MR\right)}}\approx 1{,}9$ с.

Отметим, что описанный способ решения задачи позволяет находить частоту и период колебаний механической системы в тех случаях, когда по каким-либо причинам запись уравнений движения системы (с использованием второго закона Ньютона) вызывает трудности.

1.5.13. Горизонтальная доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом $T=2$ с. При какой амплитуде колебаний A, лежащее на ней тело начнет скользить? Коэффициент трения между доской и телом $\mu=0{,}2$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Решение. Направим ось Ox горизонтально и совместим начало координат с некоторой фиксированной точкой доски в положении равновесия. Зависимость координаты этой точки от времени имеет вид: $x = A\cos\frac{2\pi}{T}t$. Ускорение доски также описывается гармонической функцией времени: $a = \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi}{T}t$. Амплитудное значение ускорения доски равно $a_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$. Лежащее на доске тело приводится в движение силой трения. По закону сухого трения максимальное значение силы трения покоя равно μmg. Максимальное ускорение, которое по второму закону Ньютона сила трения может сообщить телу, $a_{\max} = \mu g$. Следовательно, тело начнет скользить по доске, когда амплитудное значение ускорения доски превысит максимально возможное значение ускорения тела, т.е. при $a_0 > a_{\max}$. Отсюда $A > \frac{\mu g T^2}{4\pi^2} \approx 20$ см.

При решении этой задачи следует понимать, что, пока брусок не скользит по доске, доска и брусок движутся как единое целое, и их ускорения одинаковы.



1.5.14.[E] Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен $\mu = 0{,}2$. Отношение массы бруска к массе грузика равно 8. Грузик маятника совершает колебания вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими, равна $A = 1{,}5$ см. Чему равен период этих гармонических колебаний?

Решение. В начале решения задачи проанализируем процессы, которые могут происходить в данной системе при вертикальных колебаниях грузика массой m. Направим ось X вверх. Поскольку пружина легкая, то сумма приложенных к ней сил все время равна нулю, и сила натяжения нити равна по модулю упругой силе, действующей на грузик. Очевидно, что в отсутствие колебаний сила натяжения нити F_0 будет равна весу грузика mg. При малых отклонениях x грузика от положения равновесия на него будет действовать со стороны пружины дополнительная сила, пропорциональная, в соответствии с законом Гука, этому отклонению, и направленная противоположно ему: $F = F_0 - kx = mg - kx$; здесь k – коэффициент жесткости пружины. Уравнение движения грузика вдоль оси X под действием упругой силы, равной силе натяжения нити F, и силы тяжести mg имеет вид: $m\ddot{x} = mg - kx - mg = -kx$, или $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Это – уравнение гармонических колебаний с круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Закон движения грузика при этом имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, и сила натяжения нити меняется по закону: $F = mg - kx = m(g + \ddot{x}) = m\left(g - A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\right)$.

Для того, чтобы колебания грузика оставались гармоническими, очевидно, сила натяжения не должна обращаться в ноль, и ее не должно хватать для того, чтобы брусок, стоящий на горизонтальном столе, начинал сдвигаться. Поскольку блок идеальный и нить невесома и нерастяжима, на брусок действует сила натяжения нити, равная F; кроме того, на него действует сила трения покоя, которая по закону Амонтона-Кулона не превышает $8\mu mg$. В итоге для силы натяжения нити получаем неравенство: $0 \le F \le 8\mu mg$, $0 \le m\left(g - A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\right) \le 8\mu mg$, или, поскольку $|\sin(\omega t + \varphi)| \le 1$, должно выполняться более сильное из условий:

$$A\omega^2 \le mg;$$

$$A\omega^2 \le (8\mu - 1)mg = (8 \cdot 0{,}2 - 1)mg = 0{,}6mg.$$

Поскольку $0{,}6mg < mg$, должно выполняться второе условие, и для максимальной амплитуды гармонических колебаний получаем: $A = \dfrac{(8\mu - 1)mg}{\omega^2}$, откуда $\omega = \sqrt{\dfrac{(8\mu - 1)g}{A}}$, и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{(8\mu - 1)g}} \approx 0{,}1\pi \approx 0{,}314 \text{ с.}$$

При решении этой задачи могут возникнуть трудности в определении условий, при которых колебания грузика будут гармоническими. Здесь было бы полезным задуматься, будут ли колебания грузика гармоническими, если брусок, лежащий на столе, начнет движение.

1.5.15. Школьник бросил камень с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту перпендикулярно берегу озера со спокойной водой. Камень упал в воду, и через время $T = 136$ с после момента броска к берегу начали приходить волны. Школьник подсчитал, что за промежуток времени $\tau = 10$ с о берег ударяется $n = 30$ волн. Пренебрегая влиянием воздуха на движение камня, найти длину волны на поверхности воды. Считать, что бросок камня производится практически от уровня воды. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Время полета камня от момента броска до его падения в воду равно $t_п = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, а дальность полета камня составляет $L = v_0 \cos\alpha \cdot t_п = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Следовательно, скорость распространения волны по поверхности воды равна $c = \dfrac{L}{T - t_п} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{gT - 2v_0 \sin\alpha}$. Поскольку частота волны равна $\nu = \dfrac{n}{\tau}$, то искомая длина волны $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{gT - 2v_0 \sin\alpha} \cdot \dfrac{\tau}{n} \approx 10$ см.

Отметим, что решая эту задачу легко ошибиться при отыскании скорости распространения волны по поверхности воды, забыв вычесть из заданного в условии времени T время полета камня.

1.5.16. На одном конце легкой вертикальной пружины жесткостью $k = 100$ Н/м, другой конец которой прикреплен к потолку, подвешен груз с закрепленным на нем излучателем звука. Груз колеблется вдоль вертикали с амплитудой $A = 20$ см. При какой минимальной массе m груза приемник звука, установленный под точкой крепления пружины, не будет регистрировать изменение частоты звука? Приемник может зарегистрировать относительное изменение частоты $\Delta\nu/\nu_0 = 1\%$. Скорость звука в воздухе считать равной $c = 340$ м/с, массой излучателя пренебречь.

Решение. Изменение частоты звука, которое может зарегистрировать приемник, связано с эффектом Доплера. Рассмотрим происхождение этого эффекта.

Пусть источник звука, испускающий волны с частотой $\nu_0 = 1/T_0$, где T_0 – период колебаний волны, движется по направлению к приёмнику с постоянной скоростью v. Предположим, что за время $t = NT_0$ источник испускает N длин волн. Если скорость звука в воздухе составляет c, то через время t, когда начало первой испущенной волны пройдёт расстояние ct, последняя волна ещё только успеет «выйти» из источника, а сам источник за это время пройдёт расстояние vt. Значит, расстояние между началом первой и концом последней из испущенных волн через время t будет составлять $(c - v)t$, и на этом расстоянии будет укладываться N длин волн. Следовательно, длина волны, излучаемой движущимся источником, равна $\lambda = \dfrac{(c-v)t}{N} = (c - v)T_0$, а соответствующая ей частота, регистрируемая неподвижным приёмником,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-v)T_0} = \nu_0\frac{c}{c-v} = \nu_0\frac{1}{1-v/c}.$$

Это и есть формула, описывающая эффект Доплера для случая движущегося источника и неподвижного приемника звука. Заметим, что если источник удаляется от приёмника, то перед скоростью источника v в данной формуле должен стоять знак «плюс». Отметим ещё раз, что эффект Доплера связан с изменением длины волны, испускаемой движущимся источником, а не с изменением скорости звука, которая зависит только от свойств среды.

Таким образом, при колебаниях груза приближение излучателя к приемнику приводит к повышению частоты звука, а удаление – к понижению. При этом модуль абсолютного изменения частоты принимаемого звука при приближении излучателя к приемнику равен $\Delta\nu_1 = \nu_0 \dfrac{c}{c-v} - \nu_0 = \nu_0 \dfrac{v}{c-v}$, а при удалении излучателя от приемника $\Delta\nu_2 = \nu_0 - \nu_0 \dfrac{c}{c+v} = \nu_0 \dfrac{v}{c+v}$. Относительное изменение частоты принимаемого звука при данной скорости больше в первом случае, то есть тогда, когда груз с излучателем движется вниз. Следовательно, приемник начнет регистрировать изменение частоты звука при выполнении равенства: $\dfrac{\Delta\nu}{\nu_0} = \dfrac{v}{c-v}$, откуда $v = \dfrac{c(\Delta\nu/\nu_0)}{1+(\Delta\nu/\nu_0)}$. Скорость v движения излучателя максимальна тогда, когда колеблющийся груз проходит положение равновесия: $v = \omega A = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – круговая частота колебаний пружинного маятника. Максимальной скорости движения излучателя соответствует максимальное изменение частоты. Значит, искомая минимальная масса груза

$$m = k\left(\frac{A}{c}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\Delta\nu/\nu_0}\right)^2 \approx 353 \text{ г.}$$

Отметим, что эффект Доплера наблюдается и в случае, когда источник звука неподвижен, а приемник приближается к нему или удаляется от него. В этом случае частота звука, регистрируемая движущимся приемником, может быть определена при помощи формулы $\nu = \nu_0 \dfrac{c \pm v}{c} = \nu_0 \left(1 \pm \dfrac{v}{c}\right)$. Здесь знак «плюс» соответствует приближению приемника к источнику, а знак «минус» соответствует удалению приемника от источника. Эту формулу предлагается вывести самостоятельно.

Заметим также, что в случае, когда скорость источника намного меньше, чем скорость звука ($v \ll c$), полученную выше формулу для изменения частоты в случае движущегося источника и неподвижного приемника можно переписать в приближенном виде: $\nu = \nu_0 \dfrac{1}{1 - v/c} \approx \nu_0\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)$. В этом случае относительное изменение частоты звука $\dfrac{\Delta\nu}{\nu} = \dfrac{v}{c}$. Так как по условию рассматриваемой задачи $\Delta\nu/\nu_0 = 0{,}01 << 1$, то и $v/c << 1$. Значит, записанную приближенную формулу можно применять для решения данной задачи, и $m = k\left(\dfrac{A}{c(\Delta\nu/\nu_0)}\right)^2 \approx 346$ г, что мало отличается от ранее вычисленного значения.

Задачи для самостоятельного решения

1.5.17. Математический маятник совершает малые колебания. Известно, что через время $\tau = 0{,}314$ с после прохождения маятником положения равновесия его отклонение составило некоторую величину α_0, а через время 2τ – величину $\sqrt{3}\alpha_0$. Найти длину маятника l, если 2τ меньше полупериода его колебаний. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $l = 36g\left(\dfrac{\tau}{\pi}\right)^2 = 3{,}6$ м.

1.5.18. Тело массой $m = 1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, совершает свободные гармонические колебания под действием пружины. Какова полная механическая энергия колебаний E, если амплитуда колебаний $A = 0{,}2$ м, а модуль максимального ускорения тела в процессе колебаний $a_{\max} = 3$ м/с^2?

Ответ: $E = \dfrac{1}{2}mAa_{\max} = 0{,}3$ Дж.

1.5.19. Гиря массой $m = 1$ кг, подвешенная на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $A = 0,2$ м и периодом $T = 2$ с. Определить силу натяжения пружины F в момент, когда гиря достигает нижней точки. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Ответ: $F = m\left(g + \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \approx 12$ Н.

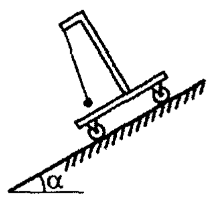
1.5.20. К потолку покоящегося вагона на нити длиной $l = 1$ м подвешен маленький шарик. В некоторый момент времени вагон приходит в движение в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $a = 1$ м/с^2. На какую максимальную высоту h относительно своего начального положения поднимется шарик? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Ответ: $h = \dfrac{2la^2}{g^2 + a^2} \approx 2$ см.

1.5.21. Зная период колебаний маятника на уровне моря $T_0 = 1$ с, найти период колебаний этого маятника T_1 на высоте $h = 6,4$ км над уровнем моря. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Ответ: $T_1 = \left(1 + \dfrac{h}{R}\right)T_0 = 1,001$ с.

1.5.22. Математический маятник длиной $l = 0,5$ м подвешен на штативе, закрепленном на тележке, которая свободно скатывается с наклонной плоскости. Найти период T малых колебаний маятника относительно тележки. Считать, что масса тележки значительно больше массы маятника, а силы трения пренебрежимо малы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Угол наклона плоскости к горизонтали $\alpha = 30°$.



Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1,5$ с.

1.5.23. Шарик, надетый на гладкую горизонтальную спицу, прикреплен к концам двух невесомых пружин. Вторые концы

пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия шарика пружины не деформированы. Каков период T колебаний шарика, если известно, что при поочередном подвешивании шарика к каждой из пружин по отдельности их удлинения составили $h_1 = 4$ см и $h_2 = 6$ см? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

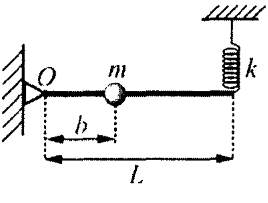
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h_1 h_2}{g(h_1 + h_2)}} \approx 0{,}31$ с.

1.5.24. Определить период T вертикальных колебаний груза массой $m = 15$ г, подвешенного к двум последовательно соединенным пружинам, жесткости которых равны $k_1 = 10$ Н/м и $k_2 = 15$ Н/м.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \approx 0{,}314$ с.

1.5.25. Груз массой $m = 200$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, второй конец которой прикреплен к потолку. Середину пружины привязали к потолку слегка натянутой легкой вертикальной нерастяжимой нитью. После этого груз сместили на небольшое расстояние вниз и отпустили. Найти период возникших колебаний груза.

Ответ: $T = \pi\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 0{,}54$ с.



1.5.26. Один конец жесткой невесомой штанги длиной $L = 1$ м шарнирно закреплен в точке O, а к ее другому концу прикреплена пружина жесткостью $k = 10$ Н/м. На расстоянии $b = 0{,}5$ м от точки O на штанге закреплен небольшой по размерам груз массой $m = 100$ г. В положении равновесия штанга горизонтальна, а ось пружины вертикальна. Найти период малых колебаний груза в вертикальной плоскости.

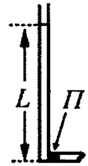
Ответ: $T = 2\pi \dfrac{b}{L}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 0{,}314$ с.

1.5.27. Из листовой резины склеили трубку радиусом $r = 5$ см и, заткнув один конец, стали надувать ее воздухом. Когда давление внутри трубки превысило атмосферное на величину $\Delta p = 10^5$ Па, ее радиус увеличился на $\Delta r = 1$ см. Найти период малых вертикальных колебаний груза массой $m = 2$ кг, подвешенного на полоске этой резины длиной $L = 0{,}5$ м и шириной $b = 1$ см. Считать, что при деформациях резина подчиняется закону Гука, а ее масса значительно меньше m.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL}{\left(1 + \dfrac{r}{\Delta r}\right) rb\Delta p}} \approx 0{,}36$ с.

1.5.28. Шайба, скользившая по гладкому горизонтальному льду, попадает на участок, неравномерно посыпанный мелким песком. Коэффициент трения шайбы по мере ее удаления x от границы участка возрастает по закону $\mu = kx$, где $k = 0{,}1$ м$^{-1}$. Через какое время шайба остановится после ее попадания на указанный участок? Размеры шайбы значительно меньше пройденного ею пути. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $\tau = \dfrac{\pi}{2\sqrt{kg}} \approx 1{,}57$ с.



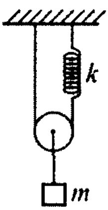
1.5.29. Идеальная жидкость, налитая в вертикальное колено узкой изогнутой под прямым углом трубки, удерживается легким поршнем $П$, находящимся в самом начале горизонтального участка трубки (см. рисунок).

После освобождения поршня через некоторый промежуток времени вся жидкость оказалась в длинном горизонтальном колене. Пренебрегая трением, найти этот промежуток времени, если первоначальная высота столба жидкости была равна $L = 0{,}5$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $\tau = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}} \approx 0{,}35$ с.

1.5.30. Тело массой $M = 10$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной с неподвижной стенкой. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль стержня. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает совершать колебания с амплитудой $A = 10$ см. Найти период T колебаний тела.

Ответ: $T = 2\pi\dfrac{M+m}{mv}A \approx 1{,}26$ с.



1.5.31. К оси невесомого блока на легких нерастяжимых нитях подвешен груз массы $m = 0{,}1$ кг. Через блок переброшена нить, один конец которой прикреплен к потолку непосредственно, а другой – через легкую пружину жесткостью $k = 10$ Н/м так, что отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны, а ось пружины совпадает с продолжением прикрепленного к пружине отрезка нити. При какой максимальной скорости груза его колебания по вертикали еще могут быть гармоническими? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $v_{\max} \le \dfrac{g}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 0{,}5$ м/с.

1.5.32. При распространении в воздухе звука частотой $\nu = 1$ кГц максимальное ускорение частиц среды составляет $a = 1000$ м/с^2. Чему равна при этом амплитуда A колебаний частиц среды?

Ответ: $A = \dfrac{a}{(2\pi\nu)^2} \approx 25$ мкм.

1.5.33. Длина резонаторного ящика камертона равна 1/4 длины звуковой волны, которую он издает. Найти частоту звуковой волны, которая может возбудить звучание камертона с ящиком длиной $L = 50$ см. Скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Ответ: $\nu = \dfrac{c}{4L} = 170$ Гц.

1.5.34. Два одинаковых динамика, излучающих синфазно звук с частотой $f = 3$ кГц, стоят на столе на расстоянии $b = 1$ м друг от друга. Наблюдатель, медленно идущий параллельно прямой, на которой расположены динамики, на расстоянии $L = 10$ м от нее, периодически перестает слышать звук динамиков. Когда наблюдатель находится напротив динамиков, расстояние между соседними точками, в которых не слышен звук, равно $\Delta x = 1{,}1$ м. Найти скорость звука в воздухе.

Ответ: $c \approx \dfrac{bf\Delta x}{L} = 330$ м/с.

1.5.35. Водитель автомобиля, движущегося со скоростью $v = 120$ км/ч, подает звуковой сигнал. Во сколько раз изменится частота звука, воспринимаемая стоящим у дороги пешеходом, после того как автомобиль проедет мимо него? Скорость звука в воздухе равна $c = 340$ м/с.

Ответ: $n = \dfrac{c+v}{c-v} \approx 1{,}22$.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

2.1.1. При повышении температуры идеального одноатомного газа на $\Delta T_1 = 150$ К среднеквадратичная скорость его молекул возросла от $v_1 = 400$ м/с до $v_2 = 500$ м/с. На какую величину ΔT_2 нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от $v_2 = 500$ м/с до $v_3 = 600$ м/с?

Решение. Среднеквадратичная скорость $v_{\text{ср.кв.}}$ молекул идеального одноатомного газа при абсолютной температуре T равна $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$ где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы. Используя это выражение, а также условие задачи, получаем, что $v_2^2 - v_1^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_2 - T_1) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_1$, $v_3^2 - v_2^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_3 - T_2) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_2$, где T_1, T_2 и T_3 – температуры газа в состояниях, в которых среднеквадратичные скорости его молекул равны, соответственно v_1, v_2 и v_3. Следовательно, $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$. Отсюда

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3 \text{ К}.$$

При решении подобных задач наиболее часто встречающейся ошибкой является неверная запись формулы, определяющей среднеквадратичную скорость молекул.

2.1.2. Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара радиусом $R = 0{,}5$ м, движется по круговой орбите со скоростью $v = 7{,}9$ км/с. Давление воздуха на высоте орбиты спутника $p = 0{,}9$ Па, температура $T = 270$ К. Полагая, что скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, найти среднее число $\bar{z}$ столкновений молекул со спутником за секунду. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Решение. Поскольку по условию скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, для решения задачи можно воспользоваться следующей моделью: летящий со скоростью v спутник сталкивается с практически неподвижными молекулами. Следовательно, за малое время τ спутник столкнется с молекулами, находящимися в воображаемом цилиндре сечением $S = \pi R^2$ и длиной $v\tau$. Число таких молекул $N = Sv\tau n$, где n – их концентрация. Считая, что разреженный воздух на высоте орбиты спутника подчиняется уравнению состояния идеального газа $p = nkT$, находим, что $n = \dfrac{p}{kT}$. Учитывая, что искомая величина $\bar{z} = \dfrac{N}{\tau}$, получаем ответ:

$$\bar{z} = \pi R^2 v \frac{p}{kT} \approx 1{,}5 \cdot 10^{24} \ \text{с}^{-1}.$$

При решении этой задачи следует отметить, что при движении спутника радиус кривизны его траектории настолько велик, что небольшой отрезок его траектории можно считать прямолинейным.

2.1.3. Плотность смеси азота и кислорода при температуре $t = 17\,^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Найдите концентрации n_1 и n_2 молекул азота и кислорода в смеси. Молярная масса азота $M_1 = 28$ г/моль, кислорода – $M_2 = 32$ г/моль. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение. Будем считать, что смесь газов подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева. Тогда для плотности ρ_i и давления p_i каждой из компонент смеси справедливы следующие выражения: $\rho_i = n_i \dfrac{M_i}{N_A}$, $p_i = n_i kT$, где n_i – концентрация молекул i-й компоненты, M_i – молярная масса i-й компоненты смеси ($i = 1, 2$), k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро, T – абсолютная температура. Поскольку обе компоненты смеси занимают один и тот же объем, плотность смеси $\rho = \rho_1 + \rho_2$. По закону Дальтона давление смеси $p_0 = p_1 + p_2$. Используя записанные выражения, для смеси газов получаем систему уравнений: $n_1 \dfrac{M_1}{N_A} + n_2 \dfrac{M_2}{N_A} = \rho$, $n_1 kT + n_2 kT = p_0$. Отсюда, учитывая, что $kN_A = R$, получаем ответ: $n_1 = \dfrac{p_0 M_2 - \rho RT}{kT(M_2 - M_1)} \approx 1{,}9 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2 = \dfrac{\rho RT - p_0 M_1}{kT(M_2 - M_1)} \approx 0{,}57 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

При решении подобных задач важно помнить, что давление смеси нескольких газов в некотором объеме равно сумме парциальных давлений компонент смеси: $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

2.1.4. В баллоне находится смесь азота N_2 и водорода H_2. При некоторой температуре T, при которой все молекулы азота диссоциировали на атомы, а диссоциацией молекул водорода еще можно пренебречь, давление смеси в баллоне оказалось равным p. При температуре $2T$, при которой молекулы обоих газов полностью диссоциировали, давление в баллоне стало равным $3p$. Каково отношение α числа атомов азота к числу атомов водорода в смеси?

Решение. Обозначим число атомов азота и число атомов водорода в смеси через n_1 и n_2, соответственно. Уравнения состояния смеси имеют вид: $pV = \left(n_1 + \dfrac{n_2}{2}\right)kT$ (при температуре T),

$3pV=(n_1+n_2)k\cdot 2T$ (при температуре $2T$). Здесь V – объем баллона, k – постоянная Больцмана. Выражая из этих уравнений отношение $\alpha=n_1/n_2$, получаем ответ: $\alpha=\frac{1}{2}$.

Трудности, возникающие при решении этой задачи, могут возникнуть с записью формулы, связывающей число атомов с числом молей данного газа. Следует помнить, что $\frac{m}{M}=\frac{n}{N_A}$, где $\frac{m}{M}$ – число молей, m – масса газа, M – его молярная масса, n – число атомов, N_A – постоянная Авогадро. Кроме того, не следует забывать, что $k=\frac{R}{N_A}$, где k – постоянная Больцмана, R – универсальная газовая постоянная.

2.1.5. Горизонтальный цилиндр с газом разделен на три камеры двумя неподвижными поршнями. Температура газа во всех камерах одинакова и равна $T_0=300$ К. Давление газа в первой камере $p_1=3$ атм., объем $V_1=1$ л, во второй $p_2=2$ атм., $V_2=2$ л, в третьей, соответственно $p_3=1$ атм., $V_3=3$ л. Каково будет давление p в камерах после того, как освободив поршни, дать им возможность свободно двигаться, а температуру газа сделать равной $T=360$ К?

Решение. Запишем уравнения состояния для порций газа в камерах: $p_1V_1=\nu_1RT_0$, $p_2V_2=\nu_2RT_0$, $p_3V_3=\nu_3RT_0$. Отсюда найдем количества газа в каждой камере: $\nu_1=\frac{p_1V_1}{RT_0}$, $\nu_2=\frac{p_2V_2}{RT_0}$, $\nu_3=\frac{p_3V_3}{RT_0}$. Когда поршни освободят, давление во всех камерах станет одинаковым, и уравнение состояния газа примет вид:

$p(V_1+V_2+V_3)=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)RT$. Подставляя сюда выше найденные количества газа, получаем ответ:

$$p=\frac{(p_1V_1+p_2V_2+p_3V_3)T}{(V_1+V_2+V_3)T_0}=2 \text{ атм.} \approx 2\cdot 10^5 \text{ Па.}$$

При решении этой задачи следует обратить вниманис на то, что запись уравнений состояния, например для первого газа: $p_1V_1=\nu_1RT_0$ и $pV_1=\nu_1RT$, будет нсверной, так как объсм камер после освобождения поршней изменится. Кроме того, необходимо понимать, что, так как сосуд, в котором находятся газы, закрытый, то число молей газа в каждой из камер постоянно.

2.1.6. Два одинаковых сосуда, соединенные трубкой, содержат идеальный газ общей массой $m=6{,}6$ г. Первоначально температура газа в обоих сосудах одинакова. Затем газ в первом сосудс нагревают и поддерживают при температуре $t_1=27\ ^\circ\text{C}$, а газ во втором сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_2=87\ ^\circ\text{C}$. На какую величину Δm изменится масса газа в первом сосуде? Объем трубки не учитывать.

Решение. В начальном состоянии масса газа в каждом сосуде равна $m_0=m/2$. Уравнения конечного состояния газов имеют вид: $pV=\dfrac{m_1}{M}RT_1$, $pV=\dfrac{m_2}{M}RT_2$, где p – давление газа, одинаковое в обоих сосудах, V – объем одного из сосудов, m_1 и m_2 – массы газа в первом и втором сосудах, M – их молярная масса, $T_1=t_1+273\ ^\circ\text{C}$, $T_2=t_2+273\ ^\circ\text{C}$. Следовательно, $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{T_2}{T_1}$, $m_1+m_2=m$. Отсюда $m_1=\dfrac{mT_2}{T_1+T_2}$. Учитывая, что $\Delta m=m_1-m_0$, получаем ответ: $\Delta m=\dfrac{m(t_2-t_1)}{2(t_1+t_2+546\ ^\circ\text{C})}=0{,}3$ г.

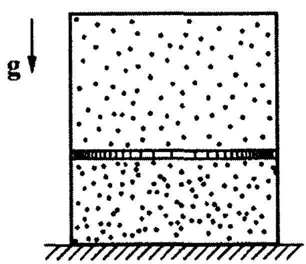
При решении этой задачи могут возникнуть трудности в правильной записи уравнений состояния газа в разные моменты времени. Кроме того, стоит отметить, что в используемые формулы входит абсолютная температура.

2.1.7.[E] В горизонтально расположенной трубке постоянного сечения, запаянной с одного конца, помещен столбик ртути длиной $l = 15$ см, который отделяет воздух в трубке от атмосферы. Трубку расположили вертикально запаянным концом вниз и нагрели на $\Delta T = 60$ К. При этом объем, занимаемый воздухом, не изменился. Давление атмосферы в лаборатории составляет $p_0 = 750$ мм рт. ст. Какова температура воздуха в лаборатории?

Решение. Пусть длина столбика воздуха в трубке равна L, площадь поперечного сечения трубки S, а температура воздуха в лаборатории T_0. Поскольку в исходном состоянии столбик ртути в трубке находится в равновесии, то давление воздуха в трубке, отделенного ртутью от атмосферы, равно атмосферному давлению p_0. Поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для воздуха в трубке имеет вид: $p_0 SL = \nu RT_0$, где ν – количество воздуха в трубке. В конечном состоянии, когда трубка расположена вертикально и воздух в ней нагрет до некоторой температуры T, давление p воздуха в трубке превышает атмосферное давление на величину гидростатического давления столбика ртути: $p = p_0 + \rho gl$, где ρ – плотность ртути. Уравнение Клапейрона–Менделеева для воздуха в этом состоянии имеет вид: $pSL = \nu RT$. По условию задачи, $T = T_0 + \Delta T$. Решая полученную систему уравнений, найдем: $T_0 = \dfrac{p_0}{\rho gl}\Delta T$. Учитывая, что $\rho gl = 150$ мм рт. ст., получим, что $T_0 = 300$ К.

Отметим, что при решении данной задачи для получения численного ответа не нужно знать плотность ртути, так как в ответ входит комбинация физических величин, сразу дающая гидростатическое давление столбика ртути в миллиметрах ртутного столба.

2.1.8.[E] Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой $H = 50$ см разделен подвижным поршнем весом $P = 110$ Н на две части, в каждой из которых содержится одинаковое количество идеального газа при тем-



пературе $T = 361$ К. Сколько молей газа находится в каждой части цилиндра, если поршень находится на высоте $h = 20$ см от дна сосуда? Толщиной поршня пренебречь.

Решение. Пусть давление в верхней части сосуда равно p_1, а в его нижней части давление равно p_2. Тогда уравнение Клапейрона–Менделеева для ν молей газа, находящегося в верхней и в нижней частях сосуда, имеет вид: $p_1S(H-h) = \nu RT$ и $p_2Sh = \nu RT$. Так как поршень находится в равновесии, то, в соответствии со вторым законом Ньютона, сумма действующих на него сил должна быть равна нулю. Сверху на поршень со стороны газа действует сила давления p_1S, а снизу на поршень действует сила давления газа p_2S. Разность этих сил уравновешивает вес поршня: $P = p_2S - p_1S$. Решая полученную систему уравнений, найдем ответ: $\nu = \dfrac{Ph}{H-2h} \cdot \dfrac{H-h}{RT} \approx 0{,}022$ моль.

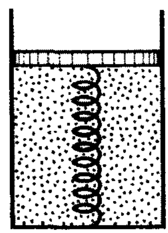
Для решения этой задачи нужно помнить определение веса – в противном случае могут возникнуть затруднения с записью условия равновесия поршня. Также важно понимать, что указанное условие является следствием второго закона Ньютона, а не третьего, как иногда ошибочно полагают.

2.1.9. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда содержится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H_1 = 30$ см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость. В новом положении расстояние между дном сосуда и поршнем составляет $H_2 = 20$ см. Найти отношение α массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа, содержавшегося в другой части сосуда. Высота сосуда $L = 60$ см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

Решение. Обозначим через m_1, p_1' и m_2, p_2' массы и давления газа, содержащегося соответственно в нижней и верхней частях сосуда в его начальном положении. По условию $\frac{m_2}{m_1} = \alpha$, или $m_2 = \alpha m_1$. Из уравнений состояния газов в нижней и верхней частях сосуда следует, что $p_1' = \frac{m_1 RT}{MH_1 S}$, $p_2' = \frac{\alpha m_1 RT}{M(L - H_1)S}$. Когда сосуд переворачивают вверх дном, в нижней его части оказывается газ массой $m_2 = \alpha m_1$ под давлением p_2'', а в верхней части – газ массой m_1 под давлением p_1'', причем $p_1'' = \frac{m_1 RT}{M(L - H_2)S}$, $p_2'' = \frac{\alpha m_1 RT}{MH_2 S}$. Из условия равновесия поршня вытекает соотношение: $p_1' - p_2' = p_2'' - p_1''$. Подставляя сюда найденные выше давления, получаем равенство: $\frac{1}{H_1} - \frac{\alpha}{L - H_1} = \frac{\alpha}{H_2} - \frac{1}{L - H_2}$. Отсюда

$$\alpha = \frac{(L - H_2 + H_1)\cdot(L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2)\cdot(L - H_2)H_1} = 0{,}7 .$$

Следует обратить внимание, что одним из главных соотношений для решения этой задачи является условие механического равновесия поршня.



2.1.10. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m = 64$ г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k = 8{,}3\cdot 10^2$ Н/м. При температуре $T_1 = 300$ К поршень располагается на расстоянии $h = 1$ м от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H = 1{,}5$ м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса кислорода $M = 32$ г/моль.

Решение. Поскольку в условии задачи не сказано, что поршень невесом, будем полагать, что он обладает некоторой массой, которую обозначим через M_0. Ничего не говорится также про атмосферное давление, поэтому будем считать, что оно существует, и обозначим его через p_0. Таким образом, на поршень действуют в общем случае четыре силы: сила тяжести $M_0 g$, сила упругости пружины, по закону Гука равная kx (x – удлинение пружины), сила атмосферного давления $p_0 S$, направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре pS, направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях имеют вид: $M_0 g + p_0 S + kx_1 = p_1 S$, $M_0 g + p_0 S + kx_2 = p_2 S$. Здесь p_1 и p_2 – давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \dfrac{k}{S}(x_2 - x_1) = \dfrac{k}{S}(H - h)$. С другой стороны, из уравнения Клапейрона–Менделеева, записанного для начального и конечного состояний газа: $p_1 hS = \dfrac{m}{M} RT_1$, $p_2 HS = \dfrac{m}{M} RT_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \dfrac{mR}{MS}\left(\dfrac{T_2}{H} - \dfrac{T_1}{h}\right)$. Приравнивая разности давлений газа, найденные этими двумя способами, получаем ответ: $T_2 = T_1 \dfrac{H}{h} + \dfrac{MkH(H-h)}{mR} \approx 487$ К. Как и следовало ожидать, наличие атмосферного давления и конечная масса поршня не влияют на ответ.

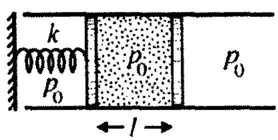
Нужно отметить, что из условия задачи неясно, была ли растянута или сжата пружина в начальном состоянии, а также меняла ли знак деформация пружины в процессе перемещения поршня. Следует понимать, что при изменении знака деформации пружины изменяется знак проекции силы упругости. Будет полезным самостоятельно убедиться в том, что от начального и конечного состояний пружины ответ не зависит.

2.1.11. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ. Сосуд помещается в лифт. Когда лифт неподвижен, расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 12$ см. При движении лифта с постоянным ускорением расстояние между поршнем и дном цилиндра оказалось равным $x = 10$ см. Найти модуль ускорения лифта a. Температуру считать постоянной, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, атмосферное давление не учитывать.

Решение. Пусть M – масса поршня, S – его площадь. Когда лифт покоится, давление газа в сосуде $p = \frac{Mg}{S}$. В ускоренно движущемся лифте, в соответствии со вторым законом Ньютона, для поршня справедливо уравнение: $Ma = p_1 S - Mg$. Следовательно, давление газа в движущемся сосуде $p_1 = \frac{M(g+a)}{S}$. По закону Бойля–Мариотта $phS = p_1 xS$, откуда вытекает равенство $gh = (g+a)x$. Отсюда $a = g\left(\frac{h}{x} - 1\right) = 2$ м/с^2.

При решении этой задачи существенным моментом является запись второго закона Ньютона для поршня.

2.1.12. Горизонтальная трубка площадью сечения $S = 20$ см^2, открытая с двух концов, закреплена неподвижно. В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью $k = 1$ кН/м с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па, пружина не деформирована, и расстояние между поршнями равно $l = 28{,}3$ см. Правый поршень медленно переместили вправо на расстояние l. Какое давление воздуха p_1 установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.



Решение. При перемещении правого поршня вправо на расстояние l левый поршень переместится в ту же сторону на некоторое расстояние. Условие равновесия левого поршня имеет вид: $p_0 S - kx - p_1 S = 0$. Отсюда давление воздуха между поршнями $p_1 = p_0 - \frac{kx}{S}$. Из закона Бойля–Мариотта следует равенство $p_0 l = p_1(2l - x)$. Исключая из этих соотношений x, получаем квадратное уравнение относительно p_1: $p_1^2 - \left(p_0 - \frac{2kl}{S}\right)p_1 - \frac{p_0 kl}{S} = 0$. Выбирая положительный корень этого уравнения, получаем ответ:

$$p_1 = \frac{p_0}{2} - \frac{kl}{S} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4} + \left(\frac{kl}{S}\right)^2} \approx 0{,}6 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

При решении этой задачи было бы неверным не учитывать силу, действующую на левый поршень со стороны пружины. Другой возможной ошибкой в решении может быть неправильное определение объема, образующегося между поршнями после их передвижения.

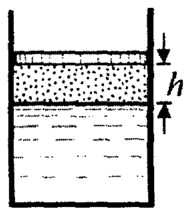
2.1.13. В стеклянную банку объемом 1 л налили 0,5 л воды при температуре $t_1 = 20\,°\text{C}$ и герметично закрыли завинчивающейся крышкой. Затем банку нагрели до температуры $t_2 = 100\,°\text{C}$. Найти силу взаимодействия F между банкой и крышкой при достижении этой температуры. Площадь крышки $S = 50$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Влажностью атмосферного воздуха, а также массой крышки пренебречь.

Решение. В банке под крышкой находятся воздух и насыщенный водяной пар. При температуре $t_2 = 100\,°\text{C}$ давление насыщенного пара равно атмосферному давлению: $p_\text{н} = p_0$. Таким образом, парциальное давление водяного пара компенсирует атмосферное давление. Следовательно, сила, которая действует на крышку со стороны банки, равна по величине $F = Sp_\text{в}$, где $p_\text{в}$ –

парциальное давление воздуха в банке. Пренебрегая изменением объема воздуха, связанным с частичным испарением воды и ее тепловым расширением, для определения давления воздуха можно использовать закон Шарля, согласно которому $p_в = p_0 \dfrac{T_2}{T_1}$. Отсюда $F = Sp_0 \dfrac{t_2 + 273\,°C}{t_1 + 273\,°C} \approx 640$ Н.

При решении этой задачи существенным моментом является то, что можно пренебречь изменением объема воды в процессе нагревания. Также можно отметить, что требуется найти величину силы *давления воздуха*, содержащегося в банке. Кроме того, важно помнить, что в используемые формулы входит величина абсолютной температуры.

2.1.14. В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух. Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При температуре $t_1 = 6\,°C$ расстояние между поршнем и поверхностью воды $h = 10$ см. На каком расстоянии H от поверхности воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры $t_2 = 100\,°C$? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре $t_1 = 6\,°C$ и изменением объема воды за счет ее испарения и теплового расширения пренебречь.



Решение. Давление смеси сухого воздуха и насыщенного водяного пара в цилиндре, обусловленное атмосферным давлением p_0 и весом поршня, в процессе нагревания цилиндра остается постоянным и равным $3p_0$. При температуре $t_1 = 6\,°C$ давление насыщенных паров воды пренебрежимо мало, поэтому давление сухого воздуха $p_{в1} = 3p_0$. При температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенных паров становится равным атмосферному. Следовательно, давление сухого воздуха при этой температуре $p_{в2} = 2p_0$. Из уравнения состояния сухого воздуха следует, что $\frac{3p_0hS}{T_1} = \frac{2p_0HS}{T_2}$, где S – площадь поршня. Отсюда

$$H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273\ °C}{t_1 + 273\ °C} \approx 20 \quad см.$$

При решении этой задачи важно понимать, что над поверхностью воды, помимо воздуха, также находится и водяной пар, причем вклад давления водяного пара в суммарное давление смеси при температуре 6 °С и температуре 100 °С существенно различен.

2.1.15. Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массой $m = 5$ кг на две равные части объемом $V = 1$ л каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 100\ °C$, с другой – воздух при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние x опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживают неизменной? Площадь основания цилиндра $S = 0{,}01$ м^2, давление насыщенного пара при температуре $t = 100\ °C$ равно $p_н = 10^5$ Па. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Когда цилиндр расположен горизонтально, давление воздуха равно давлению насыщенного водяного пара $p_н$. Записывая уравнение состояния воздуха, имеем $p_нV = \nu_вRT$, откуда количество молей воздуха $\nu_в = \frac{p_нV}{RT}$. Когда цилиндр поставили вертикально, давление водяного пара осталось прежним, а давление воздуха, как это следует из уравнения равновесия поршня, стало равным $p_н - (mg/S)$. При перемещении поршня на расстояние x объем воздуха увеличился на xS и уравнение состояния воздуха приняло вид: $\left(p_{н}-\frac{mg}{S}\right)(V+xS)=\nu_{в}RT=p_{н}V$.

Из последнего соотношения легко найти величину x, а именно: $x=\frac{mgV}{S(p_{н}S-mg)}$. Анализ этого выражения показывает, что оно теряет смысл при $mg \geq p_{н}S/2$. Действительно, максимально возможное перемещение поршня (когда он опустится до дна сосуда и весь пар сконденсируется) составляет V/S. При этом мы пренебрегаем объемом образовавшейся из пара воды, который, как показывает расчет, оказывается очень малым. В самом деле, подставляя в уравнение начального состояния пара числовые данные из условия, находим, что масса пара равна примерно 0,6 г. Следовательно, объем воды, образовавшейся при конденсации всего пара, составит около 0,06% от объема сосуда. Ответ к задаче следует сформулировать следующим образом: $x=\frac{V}{S}\cdot\frac{mg}{p_{н}S-mg}$ при $m<\frac{p_{н}S}{2g}$; $x=\frac{V}{S}$ при $m \geq \frac{p_{н}S}{2g}$. При данных из условия задачи $x=5{,}3$ мм.

Следует отметить, что полное решение этой задачи подразумевает анализ полученного выражения для смещения поршня. Будет полезным задуматься, что произойдет с насыщенным паром, если, поддерживая неизменной температуру, уменьшить объем сосуда, в котором находится этот пар.

2.1.16. Воздух в комнате объемом $V=50$ м^3 имеет температуру $t=27$ °C и относительную влажность $f_1=30\%$. Сколько времени τ должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\mu=2$ кг/час, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $f_2=70\%$? Давление насыщенных паров воды при $t=27$ °C равно $p_{н}=3665$ Па, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M=18$ г/моль.

Решение. Парциальное давление водяного пара при относительной влажности f_1 равно $p_1 = f_1 p_н /100\%$. Из уравнения Клапейрона–Менделеева $p_1 V = \frac{m_1}{M} R(t + 273\ °C)$, находим начальную массу пара, содержащегося в комнате: $m_1 = \frac{f_1 M p_н V}{100\% \cdot R\left(t + 273\ °C\right)}$.

Аналогично, при относительной влажности f_2 масса пара $m_2 = \frac{f_2 M p_н V}{R\left(t + 273\ °C\right) \cdot 100\%}$. Учитывая, что $\tau = \frac{m_2 - m_1}{\mu}$, получаем ответ: $\tau = \frac{p_н (f_2 - f_1) MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273\ °C)} \approx 16$ мин.

Приступая к решению этой задачи, важно понимать, что изначально в воздухе содержалось некоторое количество водяного пара. Если не учесть это обстоятельство, то ответ будет неверным.

2.1.17. Атмосфера некоторой сферической планеты состоит по массе на 3/4 из азота и на 1/4 из метана. Атмосферное давление вблизи поверхности планеты равно $p_0 = 1{,}6 \cdot 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 1{,}4$ м/с^2. При глобальном похолодании на планете образовался метановый океан, и у поверхности этого океана давление паров метана стало составлять $r = 50\%$ от давления его насыщенных паров. Пренебрегая вращением планеты, найти глубину океана, если плотность жидкого метана равна $\rho = 430$ кг/м^3, а давление его насыщенных паров при данной температуре равно $p_н = 40$ кПа. Высота атмосферы и глубина океана намного меньше радиуса планеты.

Решение. Атмосферное давление вблизи поверхности сферической планеты и в отсутствие океана, и при его наличии определяется полной массой атмосферы. Поэтому после образования океана давление у его поверхности равно $p_1 = p_0 - \rho g h$, где h – искомая глубина океана. С другой стороны, это давление складывается из давления $(3/4)p_0$, которое оказывает оставшийся в атмосфере азот, и из давления $r p_н$ паров оставшегося в атмосфере метана: $p_1 = \frac{3}{4}p_0 + rp_н$. Отсюда для глубины океана получаем: $h = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{p_0}{4} - rp_н\right) \approx 33$ м. Отметим, что решение задачи существует при $r < \frac{p_0}{4p_н}$.

Для того чтобы решить эту задачу, нужно понимать, что давление на участок поверхности планеты зависит только от веса столба вещества, находящегося над этим участком, причем неважно, в каком состоянии – жидком или газообразном – находится вещество.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.18.[E] Атмосфера Венеры состоит в основном из двуокиси углерода с молярной массой $M_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, имеет температуру (у поверхности) около $T_1 = 700$ К и давление p_1, равное девяноста земным атмосферам. Для атмосферы Земли температура у поверхности близка к $T_0 = 300$ К. Каково отношение n плотностей атмосфер у поверхностей Венеры и Земли?

Ответ: $n = \frac{M_1 p_1 T_0}{M_0 p_0 T_1} \approx 58{,}5$, где $p_0 \approx 10^5$ Па, $p_1 = 90 p_0$, $M_0 \approx 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2.1.19. Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре $t = 27$ °С и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $L = 50$ см каждая. На какую величину Δt нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

Ответ: $\Delta T = \frac{2lT}{L - l} = 400$ К.

2.1.20. Закрытый цилиндрический сосуд объемом $V = 6{,}6$ л разделен на две части невесомым поршнем, скользящим без трения. Одна часть содержит идеальный газ массой $m_1 = 6{,}6$ г, вторая часть – такой же газ массой $m_2 = 13{,}2$ г. Температура газов одинакова и равна температуре окружающей среды. Из второй части сосуда выпускают массу газа $\Delta m_2 = 1{,}65$ г. На какую величину ΔV изменится объем части сосуда, содержащей газ массой m_1, когда температура газов станет равной первоначальной?

Ответ: $\Delta V = \dfrac{m_1 \Delta m_2 V}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - \Delta m_2)} = 200\ \text{см}^3.$

2.1.21. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем массой $M = 2$ кг, содержит идеальный газ при температуре $T_1 = 300$ К. На поршень помещают тело массой $m = 100$ г и нагревают газ так, чтобы поршень занял первоначальное положение. Найти температуру T_2 нагретого газа. Атмосферное давление не учитывать.

Ответ: $T_2 = T_1\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) = 315\ \text{К}.$

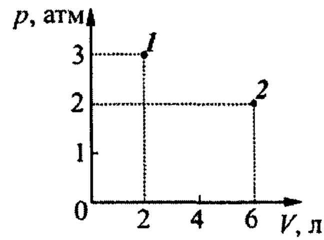
2.1.22. В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой $M_1 = 1$ кг, объем газа уменьшился в $n = 2$ раза. Какой массы M_2 груз нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в $k = 3$ раза?

Ответ: $M_2 = M_1 \dfrac{n(k-1)}{n-1} = 4\ \text{кг}.$

2.1.23. Вертикальная цилиндрическая трубка с запаянными концами разделена на две части тонким горизонтальным поршнем, способным перемещаться вдоль нее без трения. Верхняя часть трубки заполнена неоном, а нижняя – гелием, причем массы газов одинаковы. При некоторой температуре поршень находится точно посередине трубки. После того, как трубку нагрели, поршень переместился вверх и стал делить объем трубки в отношении $1:3$. Определить, во сколько раз α возросла абсолютная температура газов. Молярная масса неона $M_{\text{Ne}} = 20$ г/моль, молярная масса гелия $M_{\text{He}} = 4$ г/моль.

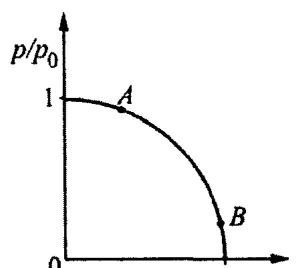
Ответ: $\alpha = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{M_{\text{Ne}} - M_{\text{He}}}{M_{\text{Ne}} - 3M_{\text{He}}} = 3$.

2.1.24. На pV – диаграмме точками отмечены два состояния некоторого количества идеального одноатомного газа, имеющего молярную массу $M = 40$ г/моль. Известно, что среднеквадратичные скорости молекул газа в этих состояниях отличаются на величину $\Delta v = 180$ м/с. Найти абсолютную температуру газа в состоянии *1*.

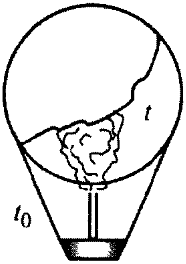


Ответ: $T_1 = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2 (\Delta v)^2 M}{3R} \approx 303$ К.

2.1.25. Один моль идеального газа переводят из состояния *A* в состояние *B* так, что на pV–диаграмме этот переход при надлежащем выборе масштабов изображается дугой окружности с центром в начале координат (см. рисунок). Найти максимальную температуру газа, зная значения $p_0 = 1$ атм и $V_0 = 50$ л, и то, что максимальная температура достигается между состояниями *A* и *B*.



Ответ: $T_{\max} = \dfrac{p_0 V_0}{2R} \approx 300$ К.



2.1.26.[E] Воздушный шар, оболочка которого имеет массу $m = 145$ кг и объем $V = 230$ м^3, наполняется горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении и температуре окружающего воздуха $t_0 = 0$ °С. Какую минимальную температуру t должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Оболочка шара нерастяжима и имеет в нижней части небольшое отверстие.

Ответ: $T_{\min} = \dfrac{MpVT_0}{MpV - mRT_0} \approx 538\ \text{К} \approx 265\ °\text{С},\ T_0 \approx t_0 + 273\ \text{К},$ $M = 0{,}029\ \text{кг/моль}.$

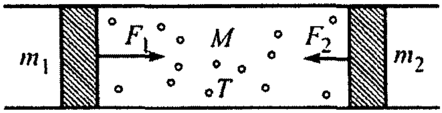
2.1.27. Спортсмен-ныряльщик массой $m = 80$ кг прыгает в воду, набрав полные лёгкие ($v = 5$ литров) воздуха. При этом объём его тела составляет $V = 82$ л. С какой максимальной глубины H он сможет всплыть, не совершая никаких движений? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $H = \dfrac{p_0}{\rho g} \cdot \dfrac{\rho V - m}{m - \rho(V - v)} \approx 6{,}7$ м.

2.1.28. В вертикальном закрытом цилиндре высотой $H = 1$ м с площадью дна $S = 100$ см^2 находится цилиндрический поплавок массой $m = 50$ г высотой $h = 10$ см с площадью поперечного сечения $s = 25$ см^2. Центр тяжести поплавка лежит на его оси вблизи дна поплавка. Остальной объем цилиндра заполнен воздухом при давлении $p_0 = 0{,}1$ атм. В цилиндр через кран, расположенный у дна, начинают нагнетать жидкость плотностью $\rho = 1$ г/см^3, поддерживая постоянной температуру в цилиндре, и поплавок начинает всплывать. При каком давлении воздуха поплавок коснется верхней крышки цилиндра, если средняя плотность поплавка меньше плотности жидкости, но много больше плотности воздуха?

Ответ: $p = \dfrac{p_0 \rho s(SH - sh)}{(S - s)(\rho sh - m)} = 1{,}625 \cdot 10^5\ \text{Па} = 1{,}625\ \text{атм}.$

2.1.29. В длинной горизонтальной трубке находятся поршни массой $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг, способные перемещаться практически без трения (см. рисунок). Между поршнями находится



$\nu = 1$ моль идеального газа, масса которого намного меньше масс поршней. Каким будет установившееся расстояние между поршнями, если к ним приложить силы $F_1 = 4$ кН и $F_2 = 1$ кН, направленные вдоль оси трубки противоположно друг другу? Температура газа постоянна и равна $T = 400$ К, трубка находится в вакууме.

Ответ: $l = \dfrac{\nu RT(m_1 + m_2)}{m_2 F_1 + m_1 F_2} \approx 1{,}66$ м.

2.1.30. В лифте, движущемся с ускорением $a = 5$ м/с^2, направленным вверх, находится цилиндрический сосуд, закрытый поршнем массой $m = 20$ кг и площадью $S = 100$ см^2. Под поршнем находится идеальный газ. Поршень расположен на расстоянии $h = 22$ см от дна сосуда. Определить, на какую величину Δh переместится поршень, если лифт будет двигаться с тем же по модулю ускорением, направленным вниз. Температура газа не изменяется. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{2mah}{Sp_0 + m(g - a)} = 4$ см.

2.1.31. В камеру сгорания реактивного двигателя ежесекундно поступает масса водорода $m = 100$ г и столько кислорода, сколько необходимо для полного сгорания водорода. Температура образующейся при этом воды существенно превышает критическую $T_к$. Найти максимальную силу тяги двигателя, если площадь поперечного сечения сопла равна $S = 10$ см^2, температура продуктов сгорания в этом сечении равна $T = 2000$ К, а их давление $p = 2\cdot10^5$ Па.

Ответ: $F_{max} = \dfrac{m^2 RTM_{H_2O}}{pSM^2_{H_2}} \approx 3740$ Н.

2.1.32. Трубка с поперечным сечением $S = 7$ см^2, заполненная водяным паром под давлением $p = 10$ кПа, запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку на две равные части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается, и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найти массу поршня m, если давление насыщенного водяного пара равно $2p$. Трением и толщиной поршня пренебречь, температуру пара считать постоянной. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $m = \dfrac{10}{7}\cdot\dfrac{pS}{g} = 1$ кг.

2.1.33. Водяной пар занимает объем $V_0 = 5$ л при температуре $t = 100$ °С. Давление пара $p = 0{,}5\cdot10^5$ Па. Какая масса Δm пара превратится в воду, если объем пара изотермически уменьшить до величины $V = 1$ л? Молярная масса воды $M = 18$ г/моль.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{M}{RT}(pV_0 - p_0V) \approx 0{,}87$ г, где $p_0 = 10^5$ Па.

2.1.34. Относительная влажность при температуре $t_1 = 27$ °С равна $f_1 = 75\%$. Во сколько раз n изменится относительная влажность, если температура упадет до $t_2 = 10$ °С? Давление насыщенного водяного пара при $t_1 = 27$ °С равно $p_{1н} = 27$ мм рт. ст., а при $t_2 = 10$ °С оно равно $p_{2н} = 9{,}2$ мм рт. ст.

Ответ: $n = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$.

2.1.35. Определить массу воды m, которую теряет человек за $\tau = 1$ час в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха $f_1 = 60\%$, относительная влажность выдыхаемого воздуха $f_2 = 100\%$. Человек делает в среднем $n = 15$ вдохов в минуту, вдыхая каждый раз $V = 2{,}5$ л воздуха. Температуру вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять $t = 36$ °C; давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_н = 5{,}9$ кПа. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Ответ: $m = \dfrac{p_н n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}2$ г.

2.1.36.[E] Человек в очках вошел с улицы в теплую комнату и обнаружил, что его очки запотели. Какой должна быть температура на улице, чтобы наблюдалось это явление? В комнате температура воздуха 22 °C, а относительная влажность воздуха 50%. При ответе на вопрос воспользуйтесь таблицей для давления насыщенных паров воды:

t, °C	8	9	10	11	12	13	14	15
p, кПа	1,07	1,15	1,23	1,31	1,40	1,50	1,60	1,70

t, °C	16	17	18	19	20	21	22	23
p, кПа	1,82	1,94	2,06	2,20	2,34	2,49	2,64	2,81

Ответ: Не выше 11 °C.

2.1.37. В утренние часы над лугом образовался туман и выпала роса при температуре воздуха $t_1 = 10$ °C, а днем при безветренной погоде воздух прогрелся до температуры $t_2 = 25$ °C, и его абсолютная влажность увеличилась за счет испарения воды с луга на $\Delta\rho = 5$ г/м^3. Найти относительную влажность днем. Давления насыщенных паров воды при утренней и дневной температурах равны $p_{н1} = 9$ мм рт. ст. и $p_{н2} = 24$ мм рт. ст.

Ответ: $r_2 = \dfrac{p_{н1}T_2}{p_{н2}T_1} + \dfrac{\Delta\rho RT_2}{p_{н2}M} \approx 61\%$, где $M = 0{,}018$ кг/моль.

2.1.38. К порции воздуха с влажностью r_1 = 20%, занимавшей объем V_1 = 1 м^3 при нормальных условиях, добавили порцию воздуха с влажностью r_2 = 30%, занимавшую объем V_2 = 2 м^3 при тех же условиях. До какого объема V следует изотермически сжать образовавшуюся смесь, чтобы содержащиеся в ней пары стали насыщенными?

Ответ: $V = r_1V_1 + r_2V_2 = 0{,}8$ м^3.

2.1.39. Для получения воды в пустыне предложен следующий способ: днем воздухом заполняют некоторый сосуд, а ночью содержимое сосуда изохорически охлаждается. При этом часть водяных паров конденсируется. Какой объем V воздуха следует охладить, чтобы получить $\upsilon = 2$ л воды, если днем температура $t_1 = 50$ °C и влажность воздуха $r = 30$ %, ночью воздух охлаждается до температуры $t_2 = 0$ °C? Давление насыщенных паров воды днем равно $p_{н1} = 12{,}3$ кПа, а ночью – $p_{н2} = 4{,}6$ мм рт. ст. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ее молярная масса $M = 18$ г/моль.

Ответ: $V = \dfrac{\upsilon\rho RT_1T_2}{M(rp_{н1}T_2 - p_{н2}T_1)} \approx 100$ м^3.

2.2. ТЕРМОДИНАМИКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

2.2.1. Металлический шарик, нагретый до температуры $t = 60\ °C$, положили в стакан с водой, имеющей температуру $t_0 = 20\ °C$. После достижения теплового равновесия температура воды в стакане стала равной $t_1 = 30\ °C$. Затем шарик переложили в другой стакан с таким же количеством воды, имеющей температуру t_0. Какая температура t_2 установится в этом стакане? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. Пусть $C_ш$ – теплоемкость шарика, а $C_в$ – теплоемкость стакана с водой. Поскольку по условию теплообменом с окружающей средой можно пренебречь, воспользуемся для решения задачи уравнением теплового баланса для теплоизолированной системы. В соответствии с этим уравнением, количество теплоты $C_ш(t - t_1)$, отданное шариком при остывании от температуры t до температуры t_1, равно количеству теплоты $C_в(t_1 - t_0)$, полученному стаканом с водой при нагревании от температуры t_0 до температуры t_1. Таким образом, для случая, когда шарик положили в первый стакан, имеем: $C_ш(t - t_1) = C_в(t_1 - t_0)$. Рассуждая аналогично, находим, что для случая, когда шарик переложили во второй стакан, $C_ш(t_1 - t_2) = C_в(t_2 - t_0)$. Из этих выражений следует равенство: $\dfrac{t - t_1}{t_1 - t_2} = \dfrac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$. Выражая из него t_2, находим ответ:

$$t_2 = \frac{t_1^2 + (t - 2t_1)t_0}{t - t_0} = 22{,}5\ °C.$$

При решении этой задачи легко допустить ошибку при записи уравнения теплового баланса. Надо понимать, что если термодинамическая система изолирована, то количество теплоты, *отданное* одним телом, будет равно количеству теплоты, *полученному* другим телом.

2.2.2.$^{\text{Е}}$ В калориметре находился лед при температуре $t_1 = -5$ °С. Какой была масса m_1 льда, если после добавления в калориметр $m_2 = 4$ кг воды, имеющей температуру $t_2 = 20$ °С, и установления теплового равновесия температура содержимого калориметра оказалась равной $t = 0$ °С, причем в калориметре была только вода? Удельные теплоемкости воды и льда равны $c_в = 4200$ Дж/(кг·°С) и $c_л = 2100$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. По условию задачи после установления теплового равновесия в калориметре была только вода. Это означает, что весь изначально находившийся в калориметре лед сначала нагрелся до температуры плавления $t = 0$ °С, получив количество теплоты $\Delta Q_1 = c_л m_1 (t - t_1)$, а затем он растаял, получив теплоту плавления $\Delta Q_2 = \lambda m_1$. Потребовавшееся для этого количество теплоты ΔQ_3 было отдано добавленной в калориметр теплой водой, остывшей в результате от начальной температуры t_2 до температуры плавления льда: $\Delta Q_3 = c_в m_2 (t_2 - t)$. В записанных выше формулах $c_л$ и $c_в$ – удельные теплоемкости льда и воды, λ – удельная теплота плавления льда. Если пренебречь теплоемкостью калориметра и воды, то можно применить уравнение теплового баланса: $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \Delta Q_3$. Отсюда получаем:

$$m_1 = \frac{c_в m_2 (t_2 - t)}{c_л (t - t_1) + \lambda} \approx 987 \text{ г} \approx 1 \text{ кг}.$$

При решении подобных задач следует помнить о том, что во время процесса плавления льда его температура остается неизменной и равной температуре плавления. Кроме того, следует заметить, что почти вся теплота, отданная теплой водой, расходуется на плавление льда (действительно, $\Delta Q_1 \approx 10{,}4$ кДж, а $\Delta Q_2 \approx 326$ кДж). Поэтому количеством теплоты ΔQ_1 при решении задачи можно пренебречь – численный ответ от этого практически не изменится.

2.2.3. В калориметре находилось $m_1 = 400$ г воды при температуре $t_1 = 5$ °C. К ней долили еще $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = 10$ °C и положили $m_3 = 400$ г льда при температуре $t_3 = -60$ °C. Какая масса m льда оказалась в калориметре после установления теплового равновесия? Удельные теплоемкости воды и льда, соответственно, $c_в = 4{,}2$ Дж/(г·К), $c_л = 2{,}1$ Дж/(г·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

Решение. Решение таких задач необходимо начинать с числовых оценок количеств теплоты, которыми обмениваются различные компоненты системы при установлении теплового равновесия. Определим вначале количество теплоты, которое может отдать вода при остывании до температуры плавления льда (0 °C): $Q_1 = m_1 c_в t_1 + m_2 c_в t_2 = 16{,}8$ кДж. Количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления, равно $Q_2 = m_3 c_л \mid t_3 \mid = 50{,}4$ кДж. Сравнивая эти величины, видим, что теплоты, отдаваемой водой при остывании, недостаточно для нагревания льда до 0 °C. В то же время, количество теплоты, которое может отдать вся вода при замерзании, $Q_3 = (m_1 + m_2)\lambda = 198$ кДж, явно превышает количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления. Следовательно, при установлении теплового равновесия в калориметре вода остынет до 0 °C, часть ее замерзнет, и весь лед будет иметь температуру плавления. Обозначив через m_x массу замерзшей воды, запишем уравнение теплового баланса: $m_x \lambda = Q_2 - Q_1$, откуда $m_x = \dfrac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \approx 102$ г. Таким образом, после установления теплового равновесия в калориметре образуется смесь воды и льда при нулевой температуре, причем масса льда $m \approx 502$ г.

Следует обратить внимание на важный момент при решении этой задачи – построение модели происходящих процессов. Кроме того, важно помнить, что температура смеси воды и льда при нормальном давлении равна 0 °C.

2.2.4. На примус поставили открытую кастрюлю с водой при температуре $t = 20\,°C$ и сняли ее через $\tau = 40$ мин. Найти объем V_1 оставшейся в кастрюле воды, если начальный объем воды составлял $V = 3$ л. В примусе каждую минуту сгорает $\mu = 3$ г керосина, удельная теплота сгорания которого $h = 40$ кДж/г, КПД примуса (относительная доля выделившейся теплоты, идущая на нагревание воды) $\eta = 42\%$, теплоемкость и удельная теплота парообразования воды соответственно $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), $r = 2{,}26$ МДж/кг, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, температура кипения воды $t_к = 100\,°C$. Теплоемкостью кастрюли пренебречь.

Решение. За время τ примус сообщает воде количество теплоты $Q = \dfrac{\eta\mu h\tau}{100\%} = 2{,}016$ МДж. Количество теплоты, требующееся для нагревания воды до температуры кипения, равно $Q_1 = \rho_в V c(t_к - t) = 1{,}008$ МДж. Из сравнения этих данных следует, что часть воды заведомо выкипит. Обозначив через V_2 объем выкипевшей воды, запишем уравнение теплового баланса: $\dfrac{\eta\mu h\tau}{100\%} = \rho_в\left(Vc(t_к - t) + V_2 r\right)$. Поскольку $V_1 = V - V_2$, ответ имеет вид: $V_1 = V - \dfrac{\mu\tau h\eta}{\rho_в r\cdot 100\%} + \dfrac{c}{r}(t_к - t)V \approx 2{,}55$ л.

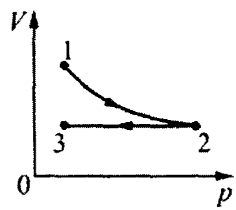
Следует отметить, что если сообщаемое количество теплоты больше, чем количество теплоты, требуемое для нагревания данного объема воды до температуры кипения, то часть воды неизбежно выкипит. Если не учесть этот факт, то ответ будет неправильным.

2.2.5. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре $T = 373$ К находится насыщенный водяной пар. При изотермическом сжатии пара выделилось количество теплоты $Q = 4540$ Дж. Найти совершенную при сжатии работу A. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль, удельная теплота парообразования воды $r = 2260$ Дж/г, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение. При изотермическом сжатии пара часть его массой Δm превращается в воду, за счет чего выделяется количество теплоты $Q = r\Delta m$. Работа изобарного сжатия $A = p\Delta V$. Из уравнения состояния, записанного для пара, имеем: $pV_0 = \frac{m_0}{M}RT$, $p(V_0 - \Delta V) = \frac{m_0 - \Delta m}{M}RT$, где V_0 – начальный объем, m_0 – начальная масса пара. Отсюда $p\Delta V = \frac{\Delta m}{M}RT$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $A = \frac{Q}{rM}RT \approx 346$ Дж.

При решении этой задачи можно допустить ошибку, если не учесть тот факт, что при изотермическом сжатии пара часть его превращается в воду.

2.2.6.[Е] Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически сжали ($T_1 = 300$ К). Затем газ изохорно охладили, понизив давление в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 2–3?

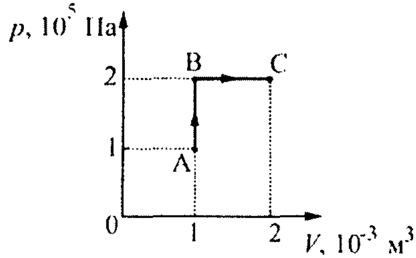


Решение. Обозначим давление газа в состоянии 3 через p_0, а объем на участке 2–3 – через V_0. Количество теплоты, отданное газом на изохорном участке 2–3, равно $Q_{23отд} = C_V|\Delta T_{23}| = \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3)$. Здесь $C_V = \frac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при постоянном объеме. Для 1 моля идеального газа, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, в состояниях 2 и 3 справедливы следующие соотношения: $3p_0V_0 = RT_1$, $p_0V_0 = RT_3$. Отсюда следует, что $R(T_1 - T_3) = 2p_0V_0 = \frac{2}{3}RT_1$, и искомое количество теплоты

$$Q_{23отд} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}RT_1 = RT_1 \approx 2500 \text{ Дж.}$$

При решении этой задачи важно понимать, что при изохорном процессе работа газа равна нулю, следовательно, количество теплоты, отданное газом, будет равно изменению его внутренней энергии.

2.2.7.[E] Рассчитайте количество теплоты, сообщенное одноатомному идеальному газу в процессе А–В–С, представленном на pV–диаграмме (см. рисунок).



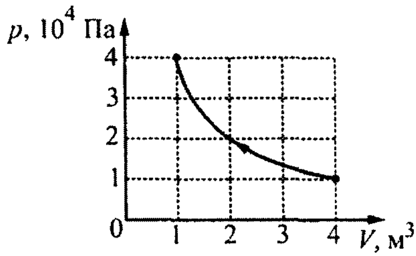
Решение. Процесс А–В–С состоит, очевидно, из изохорного процесса А–В и изобарного процесса В–С. Поэтому количество теплоты, сообщенное одноатомному идеальному газу в процессе А–В–С, равно $Q_{\text{АВС}} = C_V \nu \Delta T_{\text{АВ}} + C_p \nu \Delta T_{\text{ВС}} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{\text{АВ}} + \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{\text{ВС}}$.

Здесь $C_V = \frac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при постоянном объеме, а $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$ – молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при постоянном давлении. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, $pV = \nu RT$, откуда для изохорного процесса А–В: $\nu R \Delta T_{\text{АВ}} = V_{\text{А}} \Delta p_{\text{АВ}}$ ($V_{\text{А}}$ = const = 10^{-3} м^3, $\Delta p_{\text{АВ}} = 1 \cdot 10^5$ Па), а для изобарного процесса В–С: $\nu R \Delta T_{\text{ВС}} = p_{\text{В}} \Delta V_{\text{ВС}}$ ($p_{\text{В}}$ = const = $2 \cdot 10^5$ Па, $\Delta V_{\text{ВС}} = 1 \cdot 10^{-3}$ м^3). Подставляя полученные выражения в написанную выше формулу для $Q_{\text{АВС}}$, получаем ответ:

$$Q_{\text{АВС}} = \frac{3}{2} V_A \Delta p_{AB} + \frac{5}{2} p_B \Delta V_{\text{ВС}} = 650 \text{ Дж}.$$

Заметим, что для процессов, показанных на рисунке, можно воспользоваться прямыми формулами для определения количества теплоты при изохорном Q_V и изобарном Q_p процессах.

2.2.8.[E] На рисунке показан процесс изменения состояния идеального одноатомного газа. Внешние силы совершили над газом работу, равную $A_{\text{вн}} = 5 \cdot 10^4$ Дж. Какое количество теплоты Q отдаст газ в этом процессе? Ответ выразите в килоджоулях (кДж).



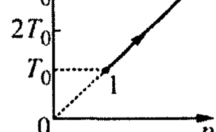
Решение. Согласно первому началу термодинамики и уравнению Клапейрона–Менделеева, количество отданной газом теплоты (с учетом соотношения $p_2V_2 = p_1V_1$, следующего из рисунка, приведенного в условии) равно

$$Q = A_{\text{вн}} - \Delta U = A_{\text{вн}} - \frac{3}{2}\nu R\Delta T = A_{\text{вн}} - \frac{3}{2}\Delta(pV) =$$

$$= A_{\text{вн}} - \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = A_{\text{вн}} = 50\,\text{кДж}.$$

При решении этой задачи важно правильно определить знаки используемых величин. Следует помнить, что теплота, получаемая газом, считается величиной положительной, а теплота, отдаваемая газом – отрицательной. Кроме того, при сжатии газа происходит уменьшение его объема. Это в свою очередь означает, что *газ* совершает отрицательную работу, или *над газом* совершили положительную работу.

2.2.9.[E] Один моль одноатомного идеального газа совершает процесс 1–2–3 (см. рисунок, где $T_0 = 100$ К). На участке 2–3 к газу подводят $Q_{23} = 2{,}5$ кДж теплоты. Найдите отношение работы A_{123}, совершаемой газом в ходе процесса, к количеству поглощенной газом теплоты Q_{123}.



Решение. Для решения задачи надо установить вид процессов 1–2 и 2–3, использовать первое начало термодинамики и формулы для расчета работы газа и теплоты, поглощаемой одноатомным идеальным газом.

Процесс 1–2 происходит по закону $p \sim T$, поэтому из уравнения Клапейрона–Менделеева $pV = RT$ следует, что этот процесс изохорный: $V = V_0 = \text{const}$, и работу в ходе этого процесса газ не совершает: $A_{12} = 0$. Температура газа на участке 1–2 повышается, как следует из рисунка, от $T_0 = 100$ К до $3T_0$. Количество теплоты, поглощенной газом на участке 1–2, равно

$$Q_{12} = C_V \Delta T_{12} = \frac{3}{2} R \cdot 2T_0 = 3RT_0 \approx 2500 \text{ Дж} = 2{,}5 \text{ кДж} .$$

Процесс 2–3 – изотермический, $T = 3T_0 = \text{const}$. Внутренняя энергия идеального газа в этом процессе не меняется: $\Delta U_{23} = 0$, и согласно первому началу термодинамики, $Q_{23} = A_{23} = 2{,}5$ кДж.

Таким образом,

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = A_{23} = Q_{23} = 2{,}5 \text{ кДж} ,$$

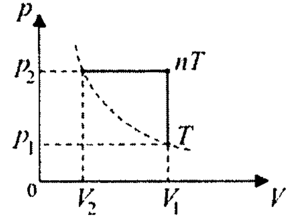
$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = 3RT_0 + Q_{23} = 5 \text{ кДж} ,$$

и искомое отношение равно $\dfrac{A_{123}}{Q_{123}} = \dfrac{Q_{23}}{3RT_0 + Q_{23}} = \dfrac{2{,}5}{5} = 0{,}5.$

Важно заметить, что, *согласно заданному графику*, температура в процессе 1–2 пропорциональна давлению. Это позволяет сделать заключение, что он – изохорный.

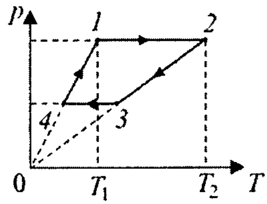
2.2.10. Идеальный газ, взятый в количестве $\nu = 5$ моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в $n = 3$ раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру газа до первоначального значения $T = 100$ К. Какая работа A совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение. График процесса изображен на рисунке. Поскольку величина работы, совершенной над газом, численно равна площади под кривой зависимости давления от объема, в нашем случае имеем: $A = p_2(V_1 - V_2) = p_2V_1 - p_2V_2$. Из уравнения состояния газа следует, что $p_1V_1 = \nu RT$, $p_2V_1 = n\nu RT$, $p_2V_2 = \nu RT$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $A = (n-1)\nu RT = 8310$ Дж.

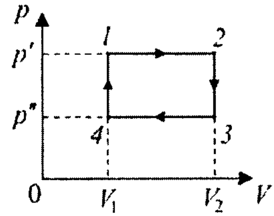


При решении этой задачи важно понимать, что при изохорном нагревании (или охлаждении) работа, совершенная над газом, равна нулю.

2.2.11. С массой $m = 80$ г идеального газа, молярная масса которого $M = 28$ г/моль, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Какую работу A совершает газ за один цикл, если $T_1 = 300$ К, $T_2 = 1000$ К, а при нагревании на участке *4 – 1* давление газа увеличивается в 2 раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



Решение. Для вычисления работы газа удобно перерисовать график процесса в виде pV–диаграммы (см. рисунок), откуда видно, что $A = (p' - p'')(V_2 - V_1)$. Используя уравнение состояния идеального газа, запишем последнее равенство в виде: $A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_3 - T_1 + T_4)$. Поскольку объемы газа на участках *2 – 3* и *4 – 1* постоянны, имеем: $\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{p'}{p''} = 2$.



Отсюда $T_4 = T_1/2$, $T_3 = T_2/2$. Подставляя найденные значения температуры в выражение для работы, получаем ответ: $A = \frac{m}{2M}R(T_2 - T_1) = 8{,}31$ кДж.

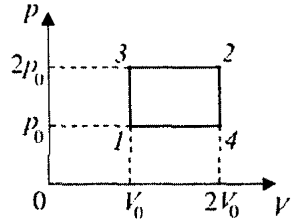
Обратите внимание на то, что решение этой задачи существенно упрощается, если приведенную в условии pT–диаграмму представить в виде pV–диаграммы.

2.2.12. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем массой $m = 4$ кг, содержится один моль одноатомного идеального газа. На какую величину Δh передвинется поршень, если газу сообщить количество теплоты Q = 10 Дж? Массой газа по сравнению с массой поршня пренебречь, атмосферное давление не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/с^2.

Решение. Поскольку расширение газа происходит при постоянном давлении, $Q = \frac{5}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа. Из уравнения изобарного процесса следует, что $R\Delta T = p\Delta V$, где $p = \frac{mg}{S}$ – давление газа (полученное из условия механического равновесия поршня), $\Delta V = S\Delta h$ – изменение его объема. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $\Delta h = \frac{2Q}{5mg} = 0{,}1$ м.

Следует напомнить, что количество теплоты, поглощаемое одним молем газа при изобарном нагревании, определяется по формуле: $Q = C_p\Delta T$, где $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$ – молярная теплоемкость идеального одноатомного газа в этом процессе.

2.2.13. Некоторое количество идеального одноатомного газа нужно перевести из состояния *1* в состояние *2*, используя изохорный и изобарный процессы (см. рисунок). Во сколько раз β отличаются количества теплоты, которые требуются для перехода из исходного в конечное состояние по путям *1 – 3 – 2* и *1 – 4 – 2* соответственно?



Решение. Проведем расчет количеств теплоты на отдельных участках. С учетом уравнения состояния газа имеем:

$$Q_{13} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 2p_0V_0 - \frac{3}{2} \cdot p_0V_0 = \frac{3}{2} p_0V_0,$$

$$Q_{32} = \frac{5}{2} \cdot \nu R(T_2 - T_3) = \frac{5}{2} \cdot 4p_0V_0 - \frac{5}{2} \cdot 2p_0V_0 = 5p_0V_0,$$

$$Q_{14} = \frac{5}{2} \cdot \nu R(T_4 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot 2p_0V_0 - \frac{5}{2} \cdot p_0V_0 = \frac{5}{2} p_0V_0,$$

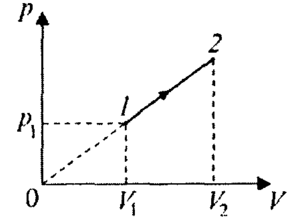
$$Q_{42} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_2 - T_4) = \frac{3}{2} \cdot 4p_0V_0 - \frac{3}{2} \cdot 2p_0V_0 = 3p_0V_0.$$

Отсюда $Q_{132} = Q_{13} + Q_{32} = \frac{13}{2} p_0V_0$ и $Q_{142} = Q_{14} + Q_{42} = \frac{11}{2} p_0V_0$.

Следовательно, $\beta = \frac{Q_{132}}{Q_{142}} = \frac{13}{11} \approx 1{,}18$.

При решении этой задачи можно допустить грубую ошибку, считая отношение количеств теплоты, как отношение площадей под графиками. Следует напомнить, что в задаче речь идет о количестве теплоты, а не о совершенной работе.

2.2.14. Найти количество теплоты ΔQ, переданное идеальному одноатомному газу при переводе его из состояния *1* в состояние *2* как показано на рисунке. При расчете принять $p_1 = 100$ кПа, $V_1 = 2$ л, $V_2 = 4$ л.



Решение. Изменение внутренней энергии в рассматриваемом процессе $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$. Учитывая, что продолжение прямой, изображающей график процесса, проходит через начало координат (давление в этом процессе пропорционально объему), имеем: $p_2 = p_1V_2/V_1$. Следовательно, $\Delta U = \frac{3}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$. Работа газа в этом процессе численно равна площади трапеции: $A = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$. Количество теплоты, полученное газом, в соответствии с первым законом термодинамики равно $\Delta Q = \Delta U + A$. Отсюда

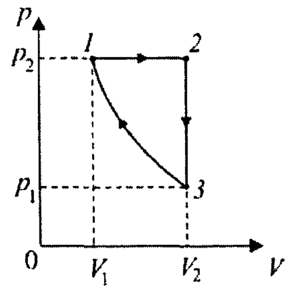
$$\Delta Q = \Delta U + A = 2p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right) = \frac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2) = 1{,}2 \text{ кДж.}$$

При решении этой задачи важно учесть, что, согласно заданному графику, давление в этом процессе пропорционально объему. Кроме того, полезно вспомнить формулу для изменения внутренней энергии идеального газа.

2.2.15. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 0{,}5$ м^3 содержит одноатомный газ, молярная масса которого $M = 4$ г/моль. В сосуд вводится дополнительно $m = 1$ г такого же газа при температуре $T = 400$ К. На какую величину Δp изменится давление? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение. Пусть p_0, m_0 и T_0 – начальные давление, масса и температура газа в сосуде. Уравнение начального состояния газа имеет вид: $p_0V = \frac{m_0}{M}RT_0$. Обозначив через T_1 температуру, установившуюся в сосуде после введения в него дополнительной порции газа, запишем уравнение конечного состояния газа: $(p_0 + \Delta p)V = \frac{m_0 + m}{M}RT_1$. Поскольку сосуд теплоизолирован и газ работу не совершает, из первого закона термодинамики следует соотношение: $\frac{3}{2}\frac{m_0}{M}RT_0+\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT=\frac{3}{2}\frac{m_0+m}{M}RT_1$, откуда $T_1=\frac{m_0T_0+mT}{m_0+m}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $\Delta p=\frac{m}{M}\cdot\frac{RT}{V}=1{,}66\cdot 10^3$ Па.

При решении этой задачи можно отметить, что выражение $\frac{3}{2}\frac{m_0}{M}RT_0+\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT=\frac{3}{2}\frac{m_0+m}{M}RT_1$, записанное в виде $\frac{3}{2}\frac{m_0}{M}RT_0-\frac{3}{2}\frac{m_0}{M}RT_1=\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT_1-\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT$, есть не что иное, как уравнение теплового баланса.

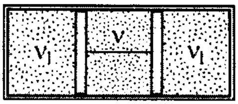


2.2.16. С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Из начального состояния $p_2=1{,}6$ МПа и $V_1=2$ л газ расширяется при постоянном давлении до объема $V_2=16$ л. Затем при постоянном объеме V_2 давление газа уменьшается до такой величины $p_1=50$ кПа, что из состояния p_1, V_2 газ приводится в начальное состояние адиабатическим сжатием. Найти работу A, совершенную газом за цикл.

Решение. pV–диаграмма рассматриваемого процесса изображена на рисунке. На участке *1 – 2* газ совершает работу $A_{12}=p_2(V_2-V_1)$. На участке 2–3 работа газа $A_{23}=0$. Для вычисления работы, совершенной газом при адиабатическом сжатии на участке 3–1, воспользуемся соотношением, следующим из первого закона термодинамики: $A_{31}=-\Delta U_{31}=-\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_3)$, где U – внутренняя энергия газа, ν – количество молей газа. Привлекая уравнение Клапейрона–Менделеева, находим, что

$A_{31} = \frac{3}{2}(p_1V_2 - p_2V_1)$. Поскольку $A = A_{12} + A_{23} + A_{31}$, ответ имеет вид: $A = p_2V_2 + \frac{3}{2}p_1V_2 - \frac{5}{2}p_2V_1 = 18{,}8$ кДж.

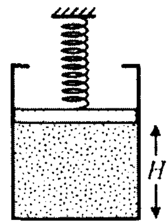
При решении этой задачи можно обратить внимание на то, что при адиабатическом процессе совершаемую газом работу удобно вычислять, используя формулу для его внутренней энергии.



2.2.17. Горизонтально расположенный цилиндр разделен двумя подвижными поршнями, связанными нитью, на три равные части объемом $V = 8{,}31$ л каждая. В центральной части находится $\nu = 0{,}533$ моля гелия, а в левой и правой частях – по $\nu_1 = 0{,}5$ молей азота. Температура всех газов равна $T_0 = 300$ К. Когда гелию сообщили количество теплоты $Q = 100$ Дж, поддерживая температуру азота постоянной, нить оборвалась. Найти максимальное натяжение F_{max}, которое выдерживает нить. Площади поршней $S = 50$ см^2, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Трение между поршнями и цилиндром пренебрежимо мало.

Решение. Поскольку нагрев гелия происходит при постоянном объеме, сообщенное ему количество теплоты идет на увеличение его внутренней энергии: $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$. Следовательно, изменение его температуры $\Delta T = \frac{2Q}{3\nu R}$. Давление азота $p_1 = \frac{\nu_1 R}{V}T_0$, давление гелия после нагревания $p = \frac{\nu R}{V}(T_0 + \Delta T)$. Из условия равновесия поршней следует, что сила натяжения нити $F = S(p - p_1)$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $F_{max} = \frac{SR}{V}\left((\nu - \nu_1)T_0 + \frac{2Q}{3R}\right) \approx 90$ Н.

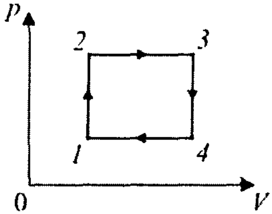
При решении задачи важно понимать, что пока поршни соединены нитью нагревание газа, находящегося в этом объеме, будет изохорическим. В этой связи полезно напомнить, что количество теплоты, поглощаемое одноатомным газом (гелием) при изохорическом нагревании, определяется по формуле: $Q = C_V \nu \Delta T$, где $C_V = \frac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость гелия в этом процессе.



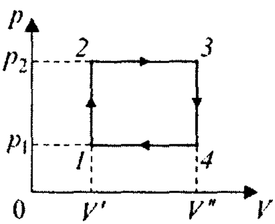
2.2.18. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем весом $P = 20$ Н содержится идеальный одноатомный газ. Между поршнем и неподвижной опорой располагается пружина, жесткость которой $k = 200$ Н/м. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H = 30$ см, при этом пружина не деформирована. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние $\Delta h = 10$ см? Атмосферное давление не учитывать.

Решение. При нагревании газ будет расширяться, совершая работу по подъему поршня и сжатию пружины: $A = P\Delta h + \frac{k\Delta h^2}{2}$. Одновременно будет повышаться температура газа. Учитывая, что давления газа в начальном и конечном состояниях равны, соответственно $p_1 = \frac{P}{S}$ и $p_2 = \frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}$, из уравнений состояния газа имеем: $\frac{P}{S}HS = \nu RT_1$, $\left(\frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}\right)(H + \Delta h)S = \nu RT_2$, откуда $T_2 - T_1 = \frac{1}{\nu R}\left((P + k\Delta h)(H + \Delta h) - PH\right)$. Поскольку в соответствии с первым началом термодинамики $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + A$, ответ имеет вид: $Q = \frac{1}{2}\left(5P + 3kH + 4k\Delta h\right)\Delta h = 18$ Дж.

Было бы неправильно считать, что сообщаемая газу теплота расходуется только на совершение газом работы по поднятию поршня. Важно отметить, что газу требуется совершить работу не только против силы тяжести поршня, но и против силы упругости пружины. Не следует также забывать, что увеличение температуры газа приведет к увеличению его внутренней энергии.



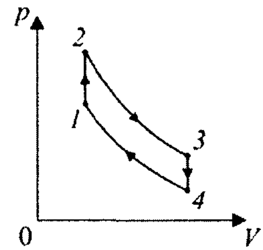
2.2.19. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти коэффициент полезного действия цикла η, если температура в состоянии *1* $T_1 = 256$ К, в состоянии *3* $T_3 = 625$ К, а в состояниях *2* и *4* температура одинакова.



Решение. Работа газа в циклическом процессе равна (см. обозначения, приведенные на рисунке): $A = (p_2 - p_1)(V'' - V')$. Обозначив через T температуру газа в точках *2* и *4* и используя уравнение Клапейрона–Менделеева, преобразуем это выражение к виду: $A = \nu R\left(T_3 - 2T + T_1\right)$. Поскольку отношения давлений в точках *1*, *2* и *4*, *3* одинаковы и процессы *1 – 2* и *3 – 4* проводятся при постоянных объемах, для температур в этих точках справедливо равенство: $\dfrac{T_3}{T} = \dfrac{T}{T_1}$. Отсюда $T = \sqrt{T_1 T_3}$. Простой анализ показывает, что полученные газом количества теплоты в данном циклическом процессе положительны на участках *1 – 2* и *2 – 3*. Поэтому полное количество теплоты, полученное газом в цикле, равно $Q_{пол} = Q_{12} + Q_{23} = \dfrac{3}{2}\nu R(T - T_1) + \dfrac{5}{2}\nu R(T_3 - T)$. Учитывая, что КПД цикла $\eta = A / Q_{пол}$, после несложных преобразований получаем ответ: $\eta = \dfrac{2\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2}{5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3}} \approx 10{,}4\%$.

Тот же ответ было бы полезно получить, воспользовавшись другой формулой, определяющей КПД: $\eta = \dfrac{Q_{пол} - |Q_{отд}|}{Q_{пол}}$, где $Q_{пол}$ – количество теплоты, полученное газом в цикле, а $Q_{отд}$ – количество теплоты, отданное газом в цикле.

2.2.20. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке, где участок *2 – 3* – адиабатическое расширение, а участок *4 – 1* – адиабатическое сжатие. Найти коэффициент полезного действия двигателя η, если известно, что температура газа при адиабатическом расширении уменьшается в n раз, а при адиабатическом сжатии увеличивается в n раз, где $n = 1{,}5$.



Решение. Работа газа за цикл равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с окружающими телами: $A = Q_{1-2} + Q_{3-4} = \dfrac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)$. Количество теплоты, полученное газом, $Q_{1-2} = \dfrac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. Следовательно, КПД цикла $\eta = \dfrac{A}{Q_{1-2}} = 1 - \dfrac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$. По условию задачи $T_2 = nT_3$, $T_1 = nT_4$. Отсюда $\eta = \dfrac{n-1}{n} \approx 33{,}3\%$.

Следует напомнить, что если полная работа газа за цикл величина положительная, то машина, работающая по этому циклу, называется тепловой. Если же полная работа газа за цикл отрицательна, то работающая по такому циклу машина называется холодильной.

2.2.21. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при $t_1 = 100\,°C$, а в качестве холодильника – сосуд со льдом при $t_2 = 0\,°C$. Какая масса льда m растает при совершении машиной работы $A = 10$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ Дж/г.

Решение. Максимально возможный КПД достигается, если тепловая машина работает по циклу Карно. Он равен $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$, где $T_1 = (t_1 + 273)$ К, $T_2 = (t_2 + 273)$ К – абсолютные температуры нагревателя и холодильника. С другой стороны, по определению КПД $\eta = \dfrac{A}{Q_{пол}}$, где $A = Q_{пол} - |Q_{отд}|$ – работа газа за цикл, $Q_{пол}$ – количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя, $Q_{отд}$ – количество теплоты, отданное за цикл холодильнику. Из равенства $\dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{Q_{пол} - |Q_{отд}|}{Q_{пол}}$ находим, что $|Q_{отд}| = Q_{пол}\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{A}{\eta}\cdot\dfrac{T_2}{T_1}$. Отданная холодильнику теплота расходуется на таяние льда при температуре плавления. Следовательно, $|Q_{отд}| = m\lambda$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$m = \frac{(t_2 + 273\,°C)}{\lambda(t_1 - t_2)} A \approx 0{,}08 \text{ г.}$$

При решении этой задачи важно понимать, что изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю. Тогда, в соответствии с первым началом термодинамики, формула $A = Q_{пол} - |Q_{отд}|$ становится очевидной.

2.2.22. Когда легковой автомобиль едет с постоянной скоростью по горизонтальному шоссе, расход бензина составляет $\mu_1 = 7$ л/100 км. Каков будет расход бензина μ_2, если этот автомобиль поедет с той же скоростью вверх по наклонному участку шоссе, образующему угол $\alpha = 0{,}01$ рад с горизонтом? Качество дорожного покрытия на горизонтальном и наклонном участках шоссе одинаково. Масса автомобиля $M = 1000$ кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$, удельная теплота сгорания бензина $q = 42$ МДж/кг, плотность бензина $\rho = 0{,}7$ кг/л. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

Решение. Пусть F – модуль результирующей всех сил сопротивления движению автомобиля. При перемещении автомобиля на расстояние l работа, совершенная двигателем, равна произведению количества теплоты, выделившейся при сгорании топлива, на коэффициент полезного действия двигателя: $A = \mu l \rho q \dfrac{\eta}{100\%}$. На горизонтальном участке шоссе длиной l эта работа равна по величине работе сил сопротивления $A_c = Fl$, т.е. $A_1 = \mu_1 \rho q \dfrac{\eta}{100\%} l = Fl$. На наклонном участке шоссе той же длиной работа двигателя равна сумме величины работы сил сопротивления $A_c = Fl$ и приращения потенциальной энергии автомобиля в поле силы тяготения $\Delta E_п = Mgl\sin\alpha$. С учетом малости угла наклона шоссе к горизонту имеем: $A_2 = \mu_2 \rho q \dfrac{\eta}{100\%} l = Fl + Mg\alpha l$. Объединяя эти равенства, находим ответ: $\mu_2 = \mu_1 + \dfrac{M\alpha g \cdot 100\%}{\rho q \eta} \approx 8{,}13$ л/100 км.

Замечание. При подстановке числовых данных из условия задачи получаем, что последнее слагаемое в ответе имеет размерность л/м. Чтобы преобразовать его к требуемой размерности (л/100 км), нужно умножить его на 10^5.

Следует понимать, что, двигаясь по наклонному участку, автомобиль совершает работу, которая идет не только на преодоление сил сопротивления, но также и на увеличение потенциальной энергии автомобиля. Если не учесть этот факт, ответ будет неверным.

Задачи для самостоятельного решения

2.2.23. В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 60\ °C$. В стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20\ °C$, а некоторое время спустя – еще два таких же шарика при той же температуре. В результате в стакане устанавливается температура $t_3 = 50\ °C$. Какова была установившаяся температура t_2 в стакане после того, как в него был опущен первый шарик? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56\ °C$.

2.2.24.[Е] Для определения удельной теплоты плавления льда в сосуд с водой стали бросать кусочки тающего льда при непрерывном помешивании. Первоначально в сосуде находилось m = 300 г воды при температуре 20 °С. К моменту времени, когда лед перестал таять, масса воды увеличилась на Δm = 84 г. Определите по данным опыта удельную теплоту λ плавления льда. Ответ выразите в кДж/кг. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), теплоемкостью сосуда пренебречь.

Ответ: $\lambda = \dfrac{cm\Delta t}{\Delta m} = 300$ кДж/кг, где $\Delta t = 20\ °C$.

2.2.25.[Е] В медный стакан калориметра массой M = 200 г, содержащий m = 150 г воды, опустили кусок льда, имевший температуру $t_л$ = 0 °С. Начальная температура калориметра с водой $t_н$ = 25 °С. В момент времени, когда наступило тепловое равновесие, температура воды и калориметра стала равной $t_к$ = 5 °С. Рассчитайте массу льда $m_л$. Удельная теплоемкость меди $c_м$ = 390 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг. Потери тепла калориметром считать пренебрежимо малыми.

Ответ: $m_л = \dfrac{(t_н - t_к)(c_в m + c_м M)}{\lambda + c_в(t_к - t_л)} \approx 40$ г.

2.2.26. Тигель, содержащий некоторое количество олова, нагревают на плитке, выделяющей в единицу времени постоянное количество теплоты. За время $\tau_0 = 20$ мин температура олова повысилась от $t_1 = 20\,°\mathrm{C}$ до $t_2 = 70\,°\mathrm{C}$, а еще через $\tau = 166$ мин олово полностью расплавилось. Найти удельную теплоемкость олова c, если его температура плавления $t_{\text{пл}} = 232\,°\mathrm{C}$, а удельная теплота плавления $\lambda = 58{,}5$ кДж/кг. Теплоемкостью тигля и потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $c = \dfrac{\lambda \tau_0}{\tau(t_2 - t_1) - \tau_0(t_{\text{пл}} - t_2)} \approx 0{,}23$ кДж/(кг·К).

2.2.27. Холодильник поддерживает в морозильной камере постоянную температуру $T_0 = -12$ °С. Кастрюля с водой охлаждается в этой камере от температуры $T_1 = +29$ °С до $T_2 = +25$ °С за $t_1 = 6$ мин, а от $T_3 = +2$ °С до $T_4 = 0$ °С – за $t_2 = 9$ мин. За сколько времени вода в кастрюле замёрзнет (при 0 °С)? Теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

Ответ. Грубая оценка: $t_3 = \dfrac{\lambda t_2}{c(T_3 - T_4)} \approx 6$ час; более точная оценка: $t_3 = \dfrac{\lambda t_2}{c(T_3 - T_4)(T_4 - T_0)}\left(\dfrac{T_3 + T_4}{2} - T_0\right) \approx 6{,}5$ час.

2.2.28. В чайник налили воду при температуре $t = 10\,°\mathrm{C}$ и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1 = 10$ мин вода закипела. Через какое время τ_2 вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}26$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_{\text{к}} = 100\,°\mathrm{C}$. Теплоемкостью чайника и потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_{\text{к}} - t)} \approx 60$ мин.

2.2.29. Какое количество теплоты необходимо, чтобы при постоянном давлении $p = 1$ атм. перевести $m = 36$ г воды, имеющей температуру $t_1 = 20$ °С, в состояние с температурой $t_2 = 120$ °С? При указанном процессе удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}26$ кДж/г, а внутренняя энергия моля водяного пара в $n = 2$ раза больше, чем внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа при той же температуре. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M_{H_2O} = 18$ г/моль.

Ответ: $\Delta Q = m\left((t_0 - t_1)c + r + \dfrac{(3n+2)(t_2 - t_0)R}{2M_{H_2O}}\right) \approx 94{,}8$ кДж,

где $t_0 = 100$ °С.

2.2.30. Моль насыщенного водяного пара изотермически сжимают при температуре $t = 100$ °С до полной конденсации. Пренебрегая объемом образовавшейся воды и зная, что удельная теплота парообразования воды при данной температуре равна $r = 2260$ Дж/г, найти изменение внутренней энергии системы пар-вода.

Ответ: $\Delta W = \nu(RT - Mr) \approx -38{,}4$ кДж.

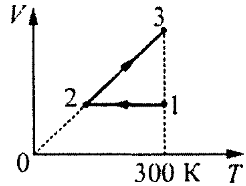
2.2.31. В вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд с гладкими стенками, закрытый лёгким теплоизолирующим поршнем площадью $S = 83$ см^2, поместили воду при температуре $T_0 = 273$ К и $\nu = 0{,}2$ моля гелия при температуре $T = 223$ К. Через продолжительное время после этого внутри сосуда установилась температура T_0. Пренебрегая давлением водяных паров, теплоёмкостью сосуда и поршня, а также растворением гелия в воде, найдите, на какое расстояние сместился поршень при установлении теплового равновесия. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность льда

$\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Давление над поршнем постоянно и равно нормальному атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ:

$$h = \frac{\nu R(T_0 - T)}{Sp_0}\left(1 + \frac{5p_0(\rho_в - \rho_л)}{2\lambda\rho_в\rho_л}\right) \approx \frac{\nu R(T_0 - T)}{Sp_0} \approx 10 \text{ см}.$$

2.2.32.[E] Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 10$ моль сначала охладили, уменьшив давление в $n = 3$ раза, а затем нагрели до первоначальной температуры $T_1 = 300$ К (см. рисунок). Какое количество теплоты получил газ на участке 2 – 3?

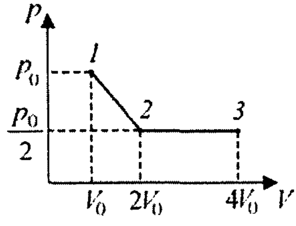


Ответ: $\Delta Q_{23} = \frac{5}{2}\nu RT_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{5}{3}\nu RT_1 \approx 41{,}6$ кДж.

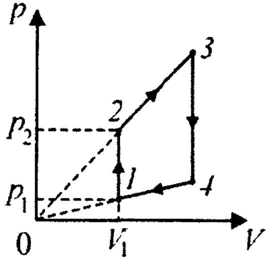
2.2.33.[E] Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно (1–2), а затем изобарно (2–3). Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную $A_{12} = 4{,}5$ кДж. Какова работа газа за весь процесс?

Ответ: $A_{123} = \frac{5}{3}A_{12} = 7500$ Дж.

2.2.34. Найти работу A, совершенную идеальным газом в ходе процесса $1-2-3$. В состоянии 1 давление газа равно $p_0 = 10^5$ Па, а объем $V_0 = 1$ л. В состоянии 2 давление газа вдвое меньше, а объем вдвое больше. Процесс $2 - 3$ представляет собой изобарное расширение до объема $4V_0$.

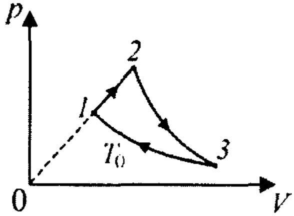


Ответ: $A = \frac{7}{4}p_0V_0 = 175$ Дж.



2.2.35. Найти работу, совершенную идеальным газом в циклическом процессе, изображенном на рисунке. Объем $V_1 = 10$ л, давление $p_1 = 10^4$ Па. Давление p_2 в $k = 4$ раза превышает p_1. Температура в точках *2* и *4* одинакова.

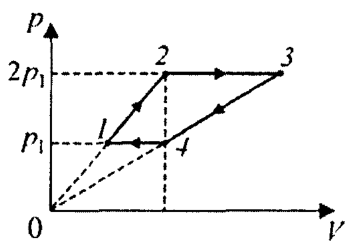
Ответ: $A = p_1 V_1 \dfrac{(k-1)^2}{2} = 450$ Дж.



2.2.36. С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке *1 – 2* объем газа увеличивается в $m = 2$ раза. Процесс *2 – 3* – адиабатическое расширение, процесс *3 – 1* – изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найти работу A газа на участке *2 – 3*. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

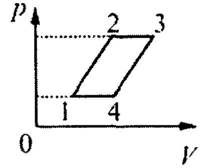
Ответ: $A = \dfrac{3}{2} R(m^2 - 1)T_0 = 11{,}2$ кДж.

2.2.37. Над идеальным одноатомным газом проводят процесс, изображенный на рисунке. Найти работу A, совершаемую газом в этом процессе, если на участке *2 – 3* газ получает количество теплоты $Q_{23} = 200$ Дж. Объем газа в точках *2* и *4* один и тот же, давление газа в точке *2* в два раза больше давления газа в точке *1*.



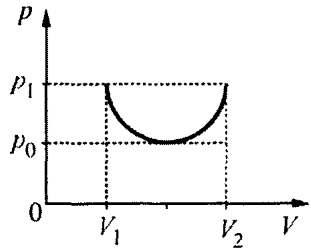
Ответ: $A = \dfrac{3}{20} Q_{23} = 30$ Дж.

2.2.38. В качестве рабочего вещества теплового двигателя используется один моль идеального газа, состояние которого изменяется так, как показано на pV–диаграмме, изображенной на рисунке, причем прямые 1–2 и 4–3 параллельны друг другу. Температуры газа в точках 1, 2 и 3 равны $T_1 = 300$ К, $T_2 = 400$ К и $T_3 = 450$ К. Найти работу газа за цикл.



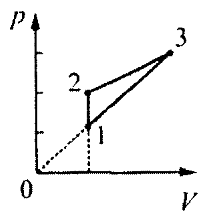
Ответ: $A = \left(T_1 - T_2 + T_3 - \dfrac{T_1 T_2}{2T_2 - T_3}\right) R \approx 60$ Дж.

2.2.39. Идеальный одноатомный газ совершает работу в процессе 1–2, который изображается на pV–диаграмме полуокружностью (см. рисунок). Найдите суммарное количество теплоты, полученное и отданное газом в ходе этого процесса. Считайте известными значения $V_1 = 1$ л, $V_2 = 3$ л, $p_0 = 1$ атм., $p_1 = 2$ атм.



Ответ: $\Delta Q = \left(\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) p_1 + \dfrac{\pi}{4} p_0\right)(V_2 - V_1) \approx 850$ Дж.

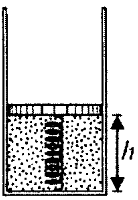
2.2.40. На pV–диаграмме показан цикл тепловой машины, рабочим телом которой является $\nu = 0{,}1$ моль идеального одноатомного газа. Точки 1 и 3 лежат на прямой, проходящей через начало координат, давления в точках 1 и 3 отличаются от давления в точке 2 на одну и ту же величину. Участок 1–2 – изохора. Температуры газа в точках 1 и 2 равны $T_1 = 400$ К и $T_2 = 600$ К, соответственно. Найти количество теплоты Q, отдаваемое газом холодильнику за один цикл.



Ответ: $Q = 8\nu R T_2 \left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right) \approx 2$ кДж.

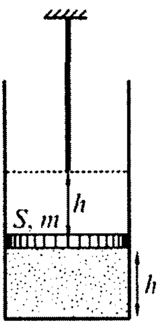
2.2.41. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде, площадь сечения которого $S = 23$ см^2, под поршнем весом $P = 10$ Н находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между дном сосуда и поршнем $h = 30$ см. На внутренней стенке сосуда имеется стопорное кольцо, не позволяющее расстоянию между дном сосуда и поршнем превысить величину $H = 50$ см. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в $\alpha = 1{,}5$ раза? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

Ответ: $Q = \dfrac{(p_0 S + P)}{2} \cdot \big((3\alpha + 2)H - 5h\big) = 210$ Дж.



2.2.42. Невесомый поршень соединен с дном цилиндрического сосуда пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда составляет $h = 0{,}2$ м. Найти количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Считать, что пружина не деформирована при $h = 0$. Атмосферное давление не учитывать.

Ответ: $\Delta Q = 6kh^2 = 24$ Дж.



2.2.43. В вертикальном цилиндре под поршнем массой $m = 1$ кг и площадью $S = 50$ см^2 содержится идеальный одноатомный газ. Поршень находится на высоте $h = 1$ м от дна цилиндра. Над поршнем (см. рисунок) висит гибкая веревка, масса единицы длины которой равна $\mu = 200$ г/м. Расстояние от поршня до нижнего конца веревки равно h. Какое количество теплоты нужно медленно сообщить газу, чтобы поршень переместился вверх на расстояние $2h$? Трением пренебречь. Атмосферное давление равно $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $Q = 5\big(p_0 S + mg + \mu g h\big)h = 2560$ Дж.

2.2.44. Внутри замкнутого сосуда с жесткими стенками находятся нагреватель, футбольный мяч и $\nu_1 = 2$ моля аргона. Внутри мяча содержится еще $\nu_2 = 1$ моль аргона. Оболочка мяча не растягивается и хорошо проводит тепло. В исходном состоянии температура всей системы равна $T = 300$ К, а давление внутри мяча больше, чем в сосуде. Нагреватель включают и медленно греют систему. Какое количество теплоты нужно сообщить аргону, чтобы мяч лопнул, если его оболочка выдерживает разность давлений, в $n = 2$ раза большую исходной?

Ответ: $Q = \dfrac{3}{2}R(\nu_1 + \nu_2)(n-1)T \approx 11{,}2$ кДж.

2.2.45. Два одинаковых мяча летят навстречу друг другу со скоростями $v = 5$ м/с и nv. После лобового удара мячи разлетаются в противоположные стороны, а их скорости различаются в $2n$ раз. Масса оболочки мяча равна $m = 0{,}1$ кг, а его объем – $V = 0{,}01$ м^3. В каждом мяче находится по $\nu = 1$ молю гелия. Все выделившееся при ударе количество теплоты поровну распределилось между мячами. Принимая $n = 2$, найти, на сколько увеличилось по сравнению с исходным установившееся давление гелия в мячах после удара? Изменением объема мячей пренебречь. Удельная теплоемкость оболочек мячей равна $c = 2000$ Дж/(кг·°С), молярная масса гелия $M = 4$ г/моль.

Ответ: $\Delta p = \dfrac{n\nu R v^2(2n^2-1)(M\nu+m)}{V(2n-1)^2(2cm+3\nu R)} \approx 8$ Па.

2.2.46. Два сосуда, объемы которых $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л, содержат одинаковый одноатомный газ молярной массой $M = 40$ г/моль. В сосуде объемом V_1 масса газа равна $m_1 = 20$ г при температуре $T_1 = 300$ К, а в сосуде объемом V_2, соответственно, – $m_2 = 80$ г при температуре $T_2 = 400$ К. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти давление p, установившееся в сосудах.

Ответ: $p = \dfrac{(m_1T_1 + m_2T_2)R}{M(V_1+V_2)} \approx 2{,}6\cdot 10^5$ Па = 2,6 атм.

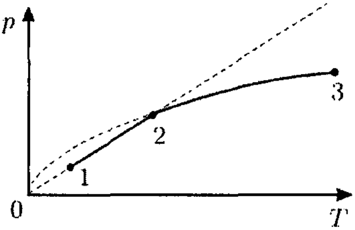
2.2.47. Два жестких герметичных сосуда соединены короткой трубкой с закрытым краном. В сосудах находится идеальный одноатомный газ: в первом – молярной массой $M_1 = 40$ г/моль при температуре $T_1 = 300$ К, а во втором – молярной массой $M_2 = 4$ г/моль при температуре $T_2 = 400$ К. После открывания крана температура образовавшейся газовой смеси установилась равной $T = 350$ К. Найти отношение масс газов, которые содержались в первом и втором сосудах до открывания крана. Систему считать теплоизолированной, теплоемкостью сосудов и трубки с краном пренебречь.

Ответ: $n = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{M_1}{M_2} \cdot \dfrac{T_2 - T}{T - T_1} = 10$.

2.2.48. В двух одинаковых сосудах, соединенных между собой короткой трубкой с краном, находится гелий. Среднеквадратичная скорость теплового движения атомов гелия в первом сосуде равна $v_1 = 1{,}4$ км/с, а во втором – $v_2 = 2$ км/с. Пренебрегая теплообменом гелия с окружающими телами, найти отношение давления, которое установится после открытия крана, к начальному давлению в первом сосуде, если масса гелия в первом сосуде была в $n = 2$ раза меньше, чем во втором.

Ответ: $\dfrac{p_к}{p_1} = \dfrac{v_1^2 + n v_2^2}{2 v_1^2} \approx 2{,}54$.

2.2.49. Один моль идеального одноатомного газа последовательно участвует в двух процессах: 1–2 и 2–3 (см. рисунок). В первом из них давление p пропорционально температуре T, во втором p пропорционально $\sqrt{T}$. Определите молярную теплоёмкость газа в каждом из двух процессов.



Ответ: $C_{12} = \dfrac{3R}{2} \approx 12{,}5$ Дж/(моль·К),

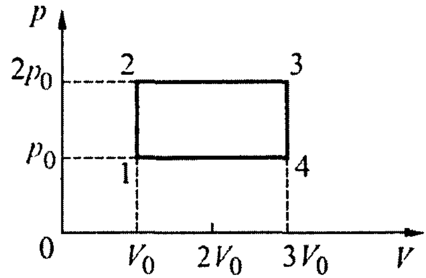
$C_{23} = 2R \approx 16{,}6$ Дж/(моль·К).

2.2.50. Найти удельную теплоемкость идеального одноатомного газа, если нагревание осуществляется так, что среднеквадратичная скорость теплового движения его атомов массой $m = 0{,}67 \cdot 10^{-26}$ кг увеличивается прямо пропорционально давлению.

Ответ: $c = \dfrac{2k}{m} \approx 4100$ Дж/(кг·°С),

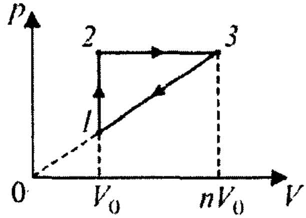
где k – постоянная Больцмана.

2.2.51.[E] Рассчитайте КПД η тепловой машины, использующей в качестве рабочего тела одноатомный идеальный газ и работающей по циклу, изображенному на рисунке.



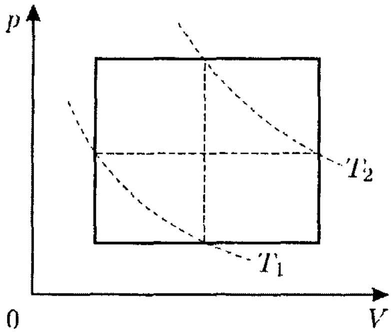
Ответ: $\eta = \dfrac{2p_0V_0}{4p_0V_0 + 7{,}5p_0V_0} = \dfrac{4}{23} \approx 17\,\%$.

2.2.52. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно $n = 3$. Найти коэффициент полезного действия двигателя η.



Ответ: $\eta = \dfrac{n-1}{3+5n} = \dfrac{1}{9} \approx 11{,}1\%$.

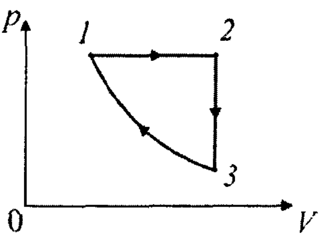
2.2.53. Найдите КПД тепловой машины, цикл которой состоит из двух изохор и двух изобар (см. рисунок), а рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Середины нижней изобары и левой изохоры лежат на изотерме, соответствующей температуре $T_1 = 300$ К, а середины верхней изобары и правой изохоры – на изотерме, соответствующей температуре $T_2 = 500$ К.



Ответ: $\eta = \dfrac{2(T_2 - T_1)}{3T_1 + 5T_2} = \dfrac{2}{17} \approx 11{,}8\%$.

2.2.54. Цикл теплового двигателя, рабочим веществом которого является моль аргона, состоит из двух изохор (1–2 и 3–4) и двух изобар (2–3 и 4–1). Точка 5 лежит посередине между точками 1 и 4 на изобаре. Абсолютная температура газа в состояниях 2 и 5 равна $T_2 = 300$ К, а в состоянии 3 равна $T_3 = 400$ К. Найти КПД η этого цикла.

Ответ: $\eta = \dfrac{2(T_3 - T_2)^2}{3T_2T_3 + 5T_3^2 - 8T_2^2} = \dfrac{1}{22} \approx 4{,}5\%$.

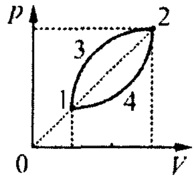


2.2.55. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является один моль идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке, где участок *3 – 1* – адиабатическое сжатие. Работа газа за один цикл составляет

$A = 625$ Дж, температура газа в состоянии *1* равна $T_1 = 300$ К, а коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$. Найти температуру T_2 в состоянии *2*. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

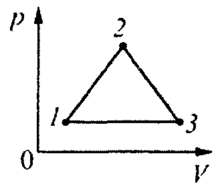
Ответ: $T_2 = T_1 + \dfrac{2A}{5R\eta} \cdot 100\% \approx 400$ К.

2.2.56. В качестве рабочего вещества в тепловой машине используется постоянное количество идеального одноатомного газа, изменение состояния которого изображено на pV–диаграмме (см. рисунок). При надлежащем выборе масштабов по осям этой диаграммы цикл изображается двумя четвертями окружностей, причем точки пересечения дуг *1* и *2* лежат на биссектрисе угла, образуемого осями диаграммы. Найти КПД цикла, если отношение максимального и минимального объемов газа в этом цикле равно $n = 3$.

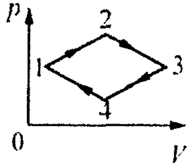


Ответ: $\eta = \dfrac{2(\pi - 2)(n-1)}{(6+\pi)n + 10 - \pi} \approx 13\%$.

2.2.57. В качестве рабочего вещества в тепловой машине используется постоянное количество гелия, изменение состояния которого изображено на pV–диаграмме, показанной на рисунке. Диаграмма имеет вид равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси V. Найти КПД этого цикла, если температура газа становится максимальной в точке 3, в точке 2 абсолютная температура в $\beta = 1{,}5$ раза меньше максимальной, а в точке 1 в $\alpha = 4$ раза меньше, чем в точке 2.

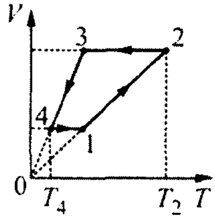


Ответ: $\eta = \dfrac{2\alpha - \alpha\beta - 1}{2\left(2(1+\alpha\beta)+\alpha\right)} = \dfrac{1}{36} \approx 2{,}8\%$.



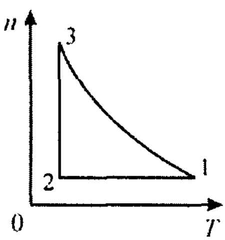
2.2.58. В pV–координатах цикл теплового двигателя, использующего в качестве рабочего вещества постоянное количество идеального одноатомного газа, представляет собой ромб, диагонали которого параллельны координатным осям (см. рисунок). Найти температуру газа в точке *4*, если КПД цикла $\eta = 0{,}125$, в точке *1* температура газа минимальна, в точке *3* максимальна, а в точке *2* равна $T_2 = 600$ К.

Ответ: $T_4 = \dfrac{1-3\eta}{1+2\eta}T_2 = 300$ К.



2.2.59. Объем V и температуру T некоторого количества идеального одноатомного газа изменяют циклически в соответствии с VT–диаграммой, показанной на рисунке. Найти КПД этого цикла, если отношение угловых коэффициентов прямых 3–4 и 1–2 к оси температур равно $n = 3/2$, а отношение температур газа в состояниях 2 и 4 равно $3n$.

Ответ: $\eta = \dfrac{4(n-1)}{13n-3} = \dfrac{4}{33} \approx 12{,}1\%$.



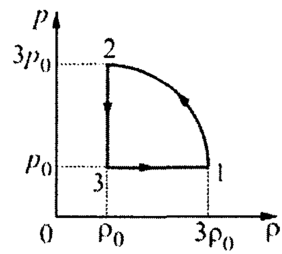
2.2.60. Моль гелия в тепловом двигателе совершает цикл, в котором концентрация газа n изменяется с абсолютной температурой T так, как показано на рисунке. На участке 3–1 концентрация газа изменяется обратно пропорционально его температуре. Зная, что в этом цикле модули работ газа на участках 3–1 и 2–3 отличаются друг от друга в $k = 2$ раза, найти КПД цикла.

Ответ: $\eta = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{k-1}{k} = 20\,\%$.

2.2.61. Моль гелия используется в качестве рабочего вещества теплового двигателя, работающего по циклу 1–2–3–1. На участке 1–2 этого цикла среднеквадратичная скорость u теплового движения атомов гелия изменяется обратно пропорционально его концентрации n, на участке 2–3 величина n остается постоянной, а на участке 3–1 величина u изменяется обратно пропорционально квадратному корню из n. Найти КПД этого цикла η, если на участке 1–2 энергия теплового движения атомов гелия увеличивается в $k = 4$ раза.

Ответ: $\eta = \dfrac{\sqrt{k} - 1}{4(\sqrt{k} + 1)} = \dfrac{1}{12} \approx 8{,}3\%$.

2.2.62. На рисунке показана зависимость давления p от плотности ρ идеального газа, используемого в качестве рабочего вещества в цикле 1–2–3–1 теплового двигателя. Найти КПД этого цикла, зная, что он в 8 раз меньше максимально возможного при тех же значениях минимальной и максимальной температур газа, что и в данном цикле.



Ответ: $\eta = \dfrac{1}{9} \approx 11{,}1\%$.

2.2.63. Какую минимальную мощность должен потреблять мотор морозильника, работающего по циклу Карно, в камере которого поддерживается температура $t_1 = -23\ ^\circ\text{C}$, если в нее через стенки поступает количество теплоты, равное $q = 0{,}1$ МДж за время $\tau = 1$ ч? Температура радиатора морозильника равна $t_2 = 57\ ^\circ\text{C}$, а КПД мотора равен $\eta_м = 0{,}8$.

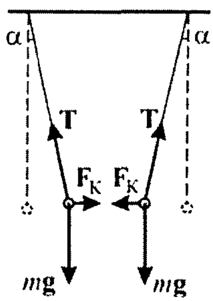
Ответ: $N_м = \dfrac{(t_2 - t_1)q}{(t_1 + 273)\tau\eta_м} \approx 11$ Вт.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Примеры решения задач и методические рекомендации

3.1.1. К нитям длиной $l = 1$ м, точки подвеса которых находятся на одном уровне на расстоянии $L = 0{,}2$ м друг от друга, подвешены два одинаковых маленьких шарика массами $m = 1$ г каждый. При сообщении им одинаковых по величине разноименных зарядов шарики сблизились до расстояния $L_1 = 0{,}1$ м. Определить величину сообщенных шарикам зарядов q. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



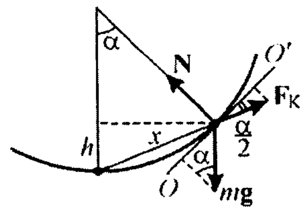
Решение. Для решения задачи воспользуемся неподвижной относительно земли системой отсчета, считая ее инерциальной. Шарики находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где через mg обозначен модуль силы тяжести, через T – модуль силы натяжения каждой из нитей, а через $F_К$ – модуль кулоновской силы, действующей на каждый из шариков и равный, в соответствии с законом Кулона, $F_К = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L_1^2}$.

Вводя угол α между нитью и вертикалью, запишем условия равновесия шариков в проекциях на горизонтальную и вертикальную координатные оси: $F_К = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$. Исключая отсюда T, получаем: $F_К = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = mg\dfrac{L - L_1}{\sqrt{4l^2 - (L - L_1)^2}}$. Используя для кулоновской силы записанное выше выражение, получаем ответ:

$$q = 2L_1\sqrt{\pi\varepsilon_0 \frac{mg(L - L_1)}{\sqrt{4l^2 - (L - L_1)^2}}} \approx 2{,}36 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

При решении подобных задач важно правильно определить, во-первых, все силы, действующие на шарик, и, во-вторых, направления этих сил.

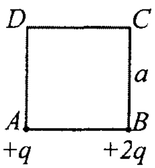
3.1.2. Два маленьких тела с равными зарядами $q = 10^{-7}$ Кл расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиусом $R = 1$ м. Первое тело закреплено в нижней точке сферы, а второе может свободно скользить по ее поверхности. Найти массу второго тела, если известно, что в состоянии равновесия оно находится на высоте $h = 0{,}1$ м от нижней точки поверхности сферы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



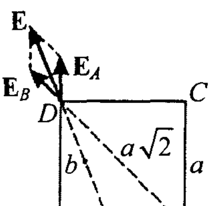
Решение. Будем использовать неподвижную относительно земли систему отсчета, которую можно считать инерциальной. Заряженное тело, способное свободно скользить по гладкой сферической поверхности, займет положение равновесия, когда сумма действующих на него сил окажется равной нулю. Эти силы показаны на рисунке, где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{N}$ – сила реакции поверхности, а $\mathbf{F}_\text{К}$ – сила кулоновского отталкивания зарядов. Условие равновесия заряженного тела удобно записать в проекции на касательную к сфере, проведенную в плоскости рисунка (линию OO'). С учетом известной из геометрии теоремы об угле, образованном касательной и хордой, имеем: $mg\sin\alpha = F_\text{К}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, или $2mg\sin\dfrac{\alpha}{2} = F_\text{К}$. В соответствии с законом Кулона $F_\text{К} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$, причем расстояние между заряженными телами x, как видно из рисунка, равно: $x = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из рисунка также видно, что высота h, на которую поднимается заряженное тело, выражается как $h = R(1-\cos\alpha) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{h}{2R}}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$m = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 gR^2}\left(\frac{2R}{h}\right)^{3/2} \approx 0{,}1 \text{ г.}$$

При решении задачи могут возникнуть трудности в определении направления силы кулоновского взаимодействия. Важно понимать, что незакрепленный шарик сможет начать движение по поверхности сферы только в результате действия сил отталкивания, действующих со стороны закрепленного шарика.



3.1.3. Два точечных заряда $+q$ и $+2q$, расположенные, соответственно, в вершинах A и B квадрата $ABCD$ со стороной $a = 1$ м, создают в вершине D электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$. В какую точку нужно поместить третий точечный заряд $-q$, чтобы напряженность суммарного электрического поля, создаваемого всеми тремя зарядами в вершине D, стала авна $-\mathbf{E}$?



Решение. Заряды, расположенные в точках A и B, создают в точке D электрические поля, модули которых равны: $E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, $E_B = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (a\sqrt{2})^2} = E_A$. Сумма этих полей направлена вдоль биссектрисы $\angle ADB$ (см. рисунок) и по модулю равна: $E = 2E_A\cos\frac{\pi}{8}$. Для того чтобы поле в точке D, оставаясь тем же самым по величине, переменило знак на противоположный, заряд $-q$ должен создать в этой точке поле $-2\mathbf{E}$, направленное против поля $\mathbf{E}$. Следовательно, этот заряд нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе $\angle ADB$ на таком расстоянии

b от точки D, чтобы выполнялось равенство: $2\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot 2\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$. Отсюда находим искомое расстояние: $b=\dfrac{a}{2\sqrt{\cos\pi/8}}$. В итоге приходим к ответу, который формулируется следующим образом: заряд $-q$ нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе $\angle ADB$ на расстоянии $b=\dfrac{a}{2\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{8}}}=\dfrac{a}{\sqrt[4]{8+4\sqrt{2}}}\approx 0{,}5$ м от точки D.

Обратите особое внимание на формулировку ответа в этой задаче. Формула $b=\dfrac{a}{2\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{8}}}=\dfrac{a}{\sqrt[4]{8+4\sqrt{2}}}\approx 0{,}5$ м не является полным ответом.

При решении подобных задач важно понимать, как направлена напряженность поля, созданного положительным и отрицательным зарядами. В связи с этим будет полезным дополнительно решить эту задачу, изменив знак одного из зарядов.

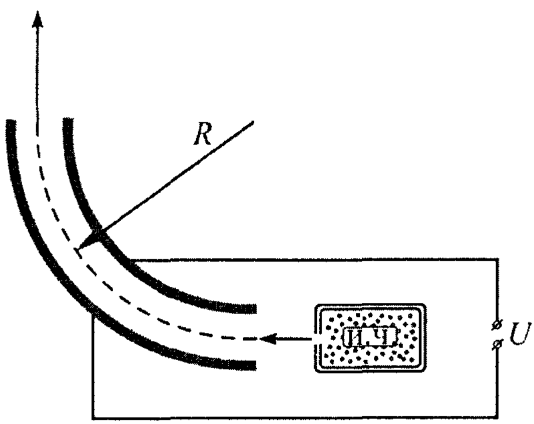
3.1.4. Внутри плоского незаряженного конденсатора, пластины которого расположены горизонтально на расстоянии $l=2$ см, падает положительно заряженная пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка движется равномерно, проходя некоторый путь за время $t_0=10$ с. Когда на конденсатор подали напряжение $U=1000$ В, пылинка начала двигаться равномерно вверх, пройдя тот же путь за время $t_1=5$ с. Определить отношение γ заряда пылинки к ее массе. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости пылинки, ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

Решение. Пусть β – коэффициент сопротивления воздуха, m – масса пылинки, d – пройденный пылинкой путь. Тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона, при движении пылинки вниз с постоянной скоростью v_0 справедливо уравнение $mg - \beta v_0 = 0$, или $mg = \beta \frac{d}{t_0}$. Здесь βv_0 – сила сопротивления воздуха. Движение пылинки вверх с постоянной скоростью v_1 описывается уравнением $mg + \beta v_1 - qE = 0$, или $mg + \beta \frac{d}{t_1} = q \frac{U}{l}$, где q – заряд пылинки. Выражая из первого уравнения β и подставляя во второе, получаем ответ:

$$\gamma = \frac{q}{m} = \frac{g\left(1 + (t_0 / t_1)\right)l}{U} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг.}$$

При решении подобных задач следует обратить особое внимание на тот факт, что движение пылинки в поле силы тяжести может быть равномерным, только если помимо силы тяжести на это тело будет действовать сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению – сила сопротивления воздуха.

3.1.5.^{E} На рисунке показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиусом $R = 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и.ч.) влетают ионы с зарядом $-e$, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля



в конденсаторе по модулю равна $E = 50$ кВ/м. Скорость ионов $v = 2 \cdot 10^5$ м/с. Ионы с каким значением массы пролетят сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.

Решение. Поскольку электрическое поле в данном случае направлено всюду перпендикулярно траектории ионов, которые могут пролететь сквозь конденсатор, то уравнение движения таких ионов в проекции на радиальное направление имеет вид: $m\dfrac{v^2}{R} = eE$. Отсюда $m = \dfrac{eER}{v^2} \approx \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5}{4 \cdot 10^{10}} = 1 \cdot 10^{-25}$ кг.

При решении подобных задач надо понимать, что сумма всех действующих сил на частицу, совершающую движение по окружности, должна быть направлена к центру окружности.

3.1.6. На длинной нити подвешен маленький шарик массой $m = 10$ г, несущий заряд $q = 10^{-7}$ Кл. В некоторый момент включают горизонтально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 5 \cdot 10^4$ В/м. На какой максимальный угол $\alpha_{\max}$ отклонится после этого нить? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Работа сил электростатического поля равна изменению механической энергии шарика:

$$qEl\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha),$$

где α – угол отклонения нити, l – ее длина, v – скорость шарика. При максимальном отклонении нити от вертикали скорость шарика обращается в нуль, следовательно, $qEl\sin\alpha_{\max} = mgl(1 - \cos\alpha_{\max})$. Последнее выражение легко привести к виду: $2qEl\sin\dfrac{\alpha_{\max}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{\max}}{2} = 2mgl\sin^2\dfrac{\alpha_{\max}}{2}$ Отсюда следует ответ: $\alpha_{\max} = 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{qE}{mg} \approx 0{,}1$ рад $\approx 5{,}7°$.

Важно заметить, что было бы неверным решать эту задачу, исходя из условия равновесия шарика. При включении электрического поля шарик пройдет положение равновесия с некоторой скоростью. Поэтому максимальный угол отклонения нити превышает угол, соответствующий положению равновесия шарика.

3.1.7.[E] Полый металлический шарик массой $m = 3$ г подвешен на шелковой нити длиной $l = 50$ см над положительно заряженной плоскостью, создающей однородное электрическое поле напряженностью $E = 2 \cdot 10^6$ В/м. Электрический заряд шарика отрицателен и по модулю равен $q = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определите частоту свободных гармонических колебаний данного маятника.

Решение. Поскольку шарик притягивается к плоскости, в положении равновесия сила натяжения нити равна $T = mg + qE$. При малых колебаниях шарика относительно положения равновесия сила натяжения нити практически не изменяется по модулю, но меняется по направлению, так что ее проекция на горизонтальную ось X в направлении отклонения шарика равна $-T\sin\alpha \approx -T\alpha = -(mg + qE)\alpha$, причем $\alpha \approx \dfrac{x}{l}$. Таким образом, уравнение движения шарика в проекции на эту ось имеет вид: $m\ddot{x} = -(mg + qE)\dfrac{x}{l}$, или $\ddot{x} + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{qE}{ml}\right)x = 0$. Это – уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{l}\left(g + \dfrac{qE}{m}\right)} = 10$ рад/с.

Следует отметить, что свободные колебания шарика в данной системе являются гармоническими только в том случае, если эти колебания – малые, то есть угол α отклонения нити от вертикали мал: $\alpha << 1$ рад. Именно это обстоятельство дает возможность при решении задачи заменить синус угла величиной этого угла.

3.1.8. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см, несущие одинаковые заряды, взаимодействуют с силой $F = 10^{-4}$ Н. Какова будет сила взаимодействия этих шаров F', если соединить их друг с другом на короткое время тонким проводом?

Решение. Поскольку по условию задачи шары достаточно удалены друг от друга, их потенциалы до соединения проводом можно определить по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы. Имеем: $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$, где q – заряд на каждом из шаров до их соединения. После соединения шаров проводом заряды на них перераспределятся так, что потенциалы шаров станут равными друг другу, т.е. $\varphi_1' = \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$.

Следовательно, $\dfrac{q_1'}{r_1} = \dfrac{q_2'}{r_2}$. Пренебрегая емкостью провода, запишем закон сохранения заряда в системе: $q_1' + q_2' = 2q$. Из последних двух уравнений находим заряды на шарах после их соединения: $q_1' = \dfrac{2qr_1}{r_1 + r_2}$, $q_2' = \dfrac{2qr_2}{r_1 + r_2}$. Сила взаимодействия шаров определяется по закону Кулона: $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (до соединения), $F' = \dfrac{q_1' q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (после соединения), где R – расстояние между шарами. Объединяя полученные выражения, находим ответ:

$$F' = F \cdot \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \approx 0{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

При решении этой задачи, как правило, возникают затруднения в правильной записи формул для потенциалов шаров и закона Кулона. Кроме того, следует обратить внимание на то, что по условию задачи шары проводящие (металлические). В связи с этим будет полезным обсудить вопросы о том, где локализован заряд проводника; каков заряд внутренних точек проводника; каковы значения электрического поля и потенциала внутренних и внешних точек проводника.

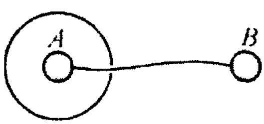
3.1.9. Радиусы двух проводящих концентрических сфер отличаются в 2 раза. Внутренняя сфера заряжена отрицательным зарядом, а внешняя – положительным, причем заряд внешней сферы в три раза больше модуля заряда внутренней сферы. Во сколько раз n изменится потенциал внутренней сферы, если эти сферы соединить проводником?

Решение. Пусть заряд на внутренней сфере равен $-q$. Тогда заряд на внешней сфере $3q$. До соединения сфер проводником потенциал внутренней сферы $\varphi_0 = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} = \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

После соединения сфер весь заряд с внутренней сферы перейдет на внешнюю сферу. Потенциал внутренней сферы станет равным потенциалу внешней: $\varphi = \dfrac{3q - q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Отсюда $n = \dfrac{\varphi}{\varphi_0} = 2$.

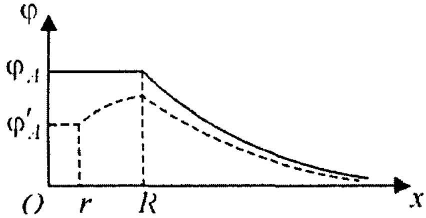
Потенциал внутренней сферы увеличится в 2 раза.

При решении подобных задач *будет весьма полезным* изобразить графики зависимостей потенциала от расстояния до соединения сфер проводником и после соединения. На этом графике следует начало координат выбрать в центре сфер, и обозначить радиус внутренней сферы и радиус внешней сферы.



3.1.10. Металлическая сфера, имеющая небольшое отверстие, заряжена положительным зарядом $Q = 10^{-7}$ Кл. Первоначально незаряженные металлические шарики A и B расположены, как показано на рисунке. Радиус сферы $R = 10$ см, радиусы каждого шарика $r = 3$ см, расстояние $AB >> R$. Определить заряды q_A и q_B, которые индуцируются на шариках, когда их соединят тонкой проволокой.

Решение. Рассмотрим вначале случай, когда шарики не соединены. При этом потенциал шарика B равен нулю: $\varphi_B = 0$, а потенциал шарика A равен потенциалу поверхности заряженной



сферы: $\varphi_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Распределение потенциала внутри и вне сферы для этого случая изображено на рисунке сплошной линией (через x обозначено расстояние от центра сферы до точки наблюдения). После соединения шариков проволокой их потенциалы выровняются: $\varphi'_A = \varphi'_B$, причем потенциал шарика A понизится, а потенциал шарика B повысится, Это произойдет за счет перетекания по проволоке некоторого заряда q. В результате на шарике A образуется заряд q_A, а на шарике B – заряд q_B, причем, в соответствии с законом сохранения заряда, $q_A = -q_B = -q$. Имеем: $\varphi'_A = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{R} - \dfrac{q}{r}\right) = \varphi'_B = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Следовательно, $q = \dfrac{Qr}{2R}$.

Распределение потенциала внутри и вне сферы после соединения шариков проволокой изображено на рисунке штриховой линией.

Отсюда $q_A = -q_B = -\dfrac{Qr}{2R} = -1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл.

Основная проблема, возникающая при решении этой задачи, заключается в непонимании того, почему появляется заряд на изначально незаряженном шарике при соединении его с другим незаряженным шариком. Надо понимать, что это явление связано с наличием в проводниках (металлах) свободных зарядов и перераспределением их вследствие выравнивания потенциалов шариков.

3.1.11. Две частицы с одинаковыми массами, заряженные равными по величине разноименными зарядами, движутся по окружности вокруг общего центра масс. Пренебрегая гравитационным взаимодействием между частицами, найти отношение α величин потенциальной и кинетической энергий частиц. Принять, что энергия взаимодействия частиц при их удалении на бесконечно большое расстояние равна нулю.

Решение. Уравнение движения каждой из частиц под действием сил кулоновского притяжения имеет вид: $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}$, где v – скорость каждой из частиц, r – радиус их орбит, q – модуль их зарядов. Кинетическая энергия частиц $E_к = 2\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 r}$, модуль потенциальной энергии их притяжения $|E_п| = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}$. Находя отношение между этими величинами, получаем ответ: $\alpha = \dfrac{|E_п|}{E_к} = 2$.

При решении этой задачи важно понимать, что энергия системы двух заряженных точечных тел складывается из кинетических энергий *каждого* из тел и потенциальной энергии электростатического взаимодействия зарядов этих тел.

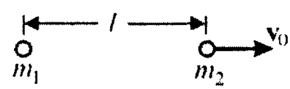
3.1.12. На шероховатой горизонтальной непроводящей поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд $q = 10^{-7}$ Кл. Маленький брусок массой $m = 10$ г, несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии $l_0 = 5$ см от закрепленного заряженного шарика. Какой путь l пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}1$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение. Поскольку сила кулоновского взаимодействия между заряженными телами является потенциальной, для решения задачи можно воспользоваться законом изменения механической энергии. По условию в начальном и конечном состояниях брусок неподвижен, и его кинетическая энергия равна нулю. Следовательно, изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов равно работе силы трения при перемещении бруска из начального положения в конечное: $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(l_0+l)}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}=-\mu mgl$. Отсюда находим $l=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0\mu mg}-l_0$. Необходимо иметь в виду, что этот результат справедлив не всегда. В самом деле, если в начальном положении бруска сила кулоновского отталкивания меньше максимального значения силы трения покоя, т.е. $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}\le\mu mg$, то брусок в движение не придет. Поэтому полная формулировка ответа такова:

$$l=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0\mu mg}-l_0 \text{ при } \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}>\mu mg;\quad l=0 \text{ при } \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}\le\mu mg.$$

При данных из условия задачи $l\approx 13$ см.

Следует обратить внимание на то, что решение этой задачи будет неполным, если не учесть тот факт, что при определенных условиях брусок может оставаться неподвижным.



3.1.13. Два маленьких шарика массами $m_1=6$ г и $m_2=4$ г, несущие заряды $q_1=10^{-6}$ Кл и $q_2=-5\cdot10^{-6}$ Кл соответственно, удерживаются на расстоянии $l=2$ м друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив одновременно второму из них скорость $v_0=3$ м/с, направленную от первого шарика вдоль линии, соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние L разойдутся шарики друг от друга? Силу тяжести не учитывать. Электрическую постоянную принять равной $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

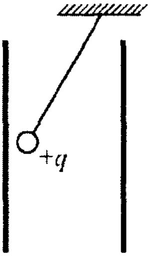
Решение. Движение шариков происходит под действием силы электростатического притяжения, которая является внутренней силой для рассматриваемой системы. Следовательно, суммарный импульс шариков остается постоянным. Закон сохранения импульса в проекции на координатную ось, положительное направление которой совпадает с направлением начальной скорости второго шарика, имеет вид: $m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Здесь v_1 и v_2 – проекции скоростей шариков на эту ось в произвольный момент времени. Кулоновские силы относятся к классу потенциальных сил, поэтому в системе сохраняется также полная механическая энергия. Потенциальная энергия электростатического взаимодействия двух зарядов определяется равенством $E_п = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r – расстояние между зарядами. Заметим, что для разноименных зарядов потенциальная энергия отрицательна и возрастает при удалении зарядов друг от друга. В соответствии с этим кинетическая энергия шариков будет убывать по мере увеличения расстояния между ними, и закон сохранения энергии запишется в виде: $\dfrac{m_2 v_0^2}{2} + \dfrac{q_1 q_1}{4\pi\varepsilon_0 l} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} + \dfrac{q_1 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$. При удалении шариков на максимальное расстояние L их относительная скорость $v_{отн} = v_1 - v_2$ обратится в нуль. Это утверждение становится очевидным, если перейти в систему отсчета, связанную с одним из шариков. В этой системе движение второго шарика подобно движению камня, брошенного вертикально вверх от поверхности Земли. Ясно, что момент остановки второго шарика относительно первого (т.е. обращения в нуль относительной скорости) действительно соответствует максимальному удалению шариков друг от друга. Таким образом, когда расстояние между шариками максимально, $v_1 = v_2 \equiv v$. Используя это равенство, преобразуем исходную систему уравнений к виду: $m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v$, $\dfrac{m_2 v_0^2}{2} - \dfrac{q_1 |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 l} = \dfrac{(m_1 + m_2) v^2}{2} - \dfrac{q_1 |q_2|}{4\pi\varepsilon_0 L}$.

Исключая из этой системы v, находим ответ:

$$L = \frac{l}{1 - \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 \, | q_2 |}} \approx 3{,}85 \text{ м}.$$

Элементарный анализ показывает, что ответ теряет смысл при $\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 \, | q_2 |} \geq 1$. Последнему неравенству можно придать более наглядную форму: $E_{0к} \geq \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right) \cdot | E_{0п} |$, где $E_{0к} = \dfrac{m_2 v_0^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия, $E_{0п} = -\dfrac{q_1 \, | q_2 |}{4\pi\varepsilon_0 l}$ – начальная потенциальная энергия системы. Физический смысл этого результата таков: если начальная кинетическая энергия системы равна или превышает взятую с некоторым коэффициентом величину начальной потенциальной энергии притяжения зарядов, то шарики удалятся на бесконечно большое расстояние и никогда не сблизятся. Когда массы шариков соизмеримы, коэффициент $\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)$ отличен от единицы. Это отражает тот факт, что начальная кинетическая энергия системы в процессе взаимодействия шариков перераспределяется между ними. Если неограниченно увеличивать массу m_1 первоначально неподвижного шарика, то множитель $\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)$ устремится к единице. Бесконечно тяжелый шарик будет оставаться неподвижным, и мы приходим случаю движения тела около *неподвижного* силового центра. Напомним, что условие того, что тело, притягивающееся к неподвижному силовому центру, не удалится от него на бесконечность, имеет хорошо известный вид: $E_{0к} < | E_{0п} |$.

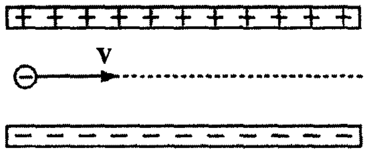
3.1.14.[E] Маленький шарик с зарядом $q = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл и массой $m = 3$ г, подвешенный на невесомой нити с коэффициентом упругости $k = 100$ Н/м, находится между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 5$ см. Какова разность потенциалов U между обкладками конденсатора, если удлинение нити $x = 0{,}5$ мм?



Решение. На шарик со стороны Земли действует направленная вниз сила тяжести $F_т = mg$. Со стороны электрического поля конденсатора на шарик действует направленная горизонтально электрическая сила $F_э = qE$, где E – напряженность электрического поля конденсатора. Так как шарик покоится, то, в соответствии со вторым законом Ньютона, векторная сумма этих сил уравновешивается силой упругости, действующей на шарик со стороны растянутой нити. Как следует из закона Гука, указанная сила упругости равна по модулю $F_у = kx$ и направлена вдоль нити вверх. Векторы сил тяжести, упругости и электрической силы образуют прямоугольный треугольник. На основании теоремы Пифагора можно записать: $(kx)^2 = (mg)^2 + (qE)^2$. Отсюда $E = \dfrac{\sqrt{(kx)^2 - (mg)^2}}{q}$. Так как электрическое поле внутри плоского конденсатора можно считать практически однородным, то напряженность E этого поля связана с разностью потенциалов U между обкладками конденсатора следующим образом: $U = Ed$. Следовательно, искомая разность потенциалов $U = \dfrac{d}{q}\sqrt{(kx)^2 - (mg)^2} = 5$ кВ.

При решении этой задачи необходимо понимать, что сила – это векторная величина. Это дает возможность, применяя законы механики, строить из векторов сил треугольники, для сторон и углов которых можно использовать различные геометрические теоремы.

3.1.15.[E] Пылинка, имеющая массу $m = 10^{-8}$ г и заряд $q = -1{,}8 \cdot 10^{-14}$ Кл, влетает в электрическое поле конденсатора в точке, находящейся посредине между его пластинами (см. рисунок).



Чему должна быть равна минимальная скорость v_0, с которой влетает пылинка в конденсатор, чтобы она смогла пролететь его насквозь? Длина пластин конденсатора $L = 10$ см, расстояние между пластинами $d = 1$ см, напряжение на пластинах конденсатора $U = 5000$ В. Силой тяжести пренебречь. Система находится в вакууме.

Решение. Направим координатную ось X вдоль пластин в направлении скорости v_0, а координатную ось Y – перпендикулярно пластинам от отрицательно заряженной пластины к положительной. На заряженную пылинку со стороны электрического поля конденсатора будет действовать электрическая сила, равная по модулю $|q|E$, где E – напряженность поля внутри конденсатора. Эта сила направлена вдоль оси Y. Под действием данной силы пылинка будет двигаться вдоль оси Y с постоянным ускорением $a = \dfrac{|q|E}{m}$ (это следует из второго закона Ньютона). Вдоль оси X на пылинку не действуют никакие силы, и поэтому она будет продолжать двигаться в данном направлении с постоянной скоростью v_0. В результате сложения двух этих движений получится движение по ветви параболы, «загибающейся» в сторону положительно заряженной пластины.

Поместим начало координат в точке, в которой частица влетает в конденсатор, и запишем закон движения частицы вдоль осей X и Y: $x(t) = v_0 t$ и $y(t) = \dfrac{at^2}{2}$, где t – время движения частицы внутри конденсатора. Для того чтобы частица смогла пролететь конденсатор насквозь, нужно, чтобы в момент времени t, когда ее смещение вдоль оси X станет равным $x = L$, смещение вдоль оси Y составило $y = d/2$. Отсюда, с учетом ранее записанных уравнений, имеем: $v_0 = L\sqrt{\frac{|q|E}{md}}$. Для плоского конденсатора связь между напряженностью поля E и напряжением на пластинах U имеет вид: $E = \frac{U}{d}$. Следовательно, $v_0 = \frac{L}{d}\sqrt{\frac{|q|U}{m}} = 30$ м/с.

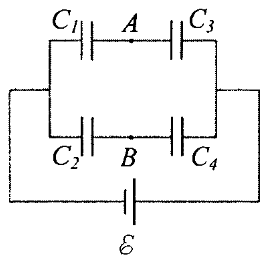
Для того чтобы решить эту задачу, нужно заметить, что она легко сводится к стандартной кинематической задаче о движении материальной точки, брошенной в поле силы тяжести в горизонтальном направлении с некоторой высоты. Заметив эту аналогию, далее нужно лишь правильно определить ускорение пылинки a, играющее в данной задаче роль ускорения свободного падения.

3.1.16. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и удерживается в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пластину. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4{,}4$ г, площадь каждой из пластин $S = 0{,}01$ м^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. При неограниченном сближении пластин плоского конденсатора, заряд на котором постоянен, энергия конденсатора стремится к нулю. Поэтому вся начальная электростатическая энергия заряженного конденсатора переходит в кинетическую энергию движущейся пластины. Из закона сохранения энергии следует: $\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{CU^2}{2}$, где $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$ – емкость конденсатора в начальном состоянии. Отсюда $v = \sqrt{2gh + \frac{\varepsilon_0 SU^2}{mh}} \approx 0{,}2$ м/с.

Для вычисления энергии конденсатора, когда он подсоединен к источнику, удобно пользоваться формулой $W=\frac{CU^2}{2}$, так как напряжение на конденсаторе постоянно и равно напряжению на клеммах источника. Надо понимать, что энергия конденсатора в этом случае обратно пропорциональна h.

Когда конденсатор отсоединен от источника, для вычисления его энергии удобно пользоваться формулой $W=\frac{q^2}{2C}$, так как в этом случае постоянен заряд конденсатора. Поскольку емкость конденсатора обратно пропорциональна h, во втором случае при сближении пластин энергия конденсатора изменяется прямо пропорционально h. Именно поэтому в момент соударения пластин энергия конденсатора обращается в ноль.



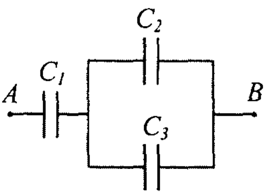
3.1.17. На рисунке изображена батарея конденсаторов, подключенная к гальваническому элементу с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В. Емкости конденсаторов равны: $C_1=1$ мкФ, $C_2=2C$, $C_3=3C$, $C_4=6$ мкФ. Чему равна разность потенциалов U между точками A и B? Считать, что до подключения к источнику все конденсаторы были не заряжены.

Решение. Обозначим через U_1, U_2, U_3, U_4 напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. Тогда величина искомой разности потенциалов выразится как $U=|U_1-U_2|=|U_3-U_4|$. Исходя из этого, найдем напряжения на конденсаторах, зная их емкости и ЭДС источника. Имеем следующую систему уравнений: $U_1+U_3=\mathcal{E}$, $C_1U_1=C_3U_3$, $U_2+U_4=\mathcal{E}$, $C_2U_2=C_4U_4$. Разрешая ее, получаем:

$$U_1=\frac{\mathcal{E}C_3}{C_1+C_3},\ U_2=\frac{\mathcal{E}C_4}{C_2+C_4},\ U_3=\frac{\mathcal{E}C_1}{C_1+C_3},\ U_4=\frac{\mathcal{E}C_2}{C_2+C_4}.$$

Отсюда $U = \mathcal{E}\dfrac{|C_2C_3 - C_1C_4|}{(C_1+C_3)(C_2+C_4)} = 0$.

Для правильного решении подобных задач необходимо понимать, что разность потенциалов между точками A и B, равна по модулю разности напряжений на конденсаторах C_1 и C_2, или C_3 и C_4. Кроме того, приступая к решению задачи, полезно вспомнить, чему равна эквивалентная емкость при последовательном и параллельном соединениях конденсаторов.

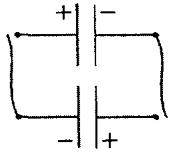


3.1.18. Первоначально незаряженные конденсаторы, емкости которых C_1, C_2 и C_3 неизвестны, соединены в цепь, как показано на рисунке. После подключения к точкам A и B источника оказалось, что заряд на конденсаторе C_1 равен $q_1 = 5\cdot 10^{-4}$ Кл, напряжение на конденсаторе C_2 равно $U_2 = 100$ В, а энергия конденсатора C_3 равна $W_3 = 10^{-2}$ Дж. Найти емкость конденсатора C_2.

Решение. Поскольку все конденсаторы были первоначально не заряжены, после подключения цепи к источнику заряд на конденсаторе C_1 будет равен суммарному заряду на конденсаторах C_2 и C_3: $q_1 = q_2 + q_3$. Учитывая, что конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно, можно записать равенство: $q_1 = (C_2 + C_3)U_2$. Энергия конденсатора C_3 равна $W_3 = \dfrac{C_3U_2^2}{2}$. Из этой системы уравнений находим ответ:

$$C_2 = \frac{q_1U_2 - 2W_3}{U_2^2} = 3 \text{ мкФ}.$$

Приступая к решению этой задачи, имеет смысл напомнить правило, являющееся следствием закона сохранения электрического заряда: если несколько участков цепи сходятся в одной точке, то алгебраическая сумма зарядов на обкладках, подсоединенных к этой точке, равна нулю.

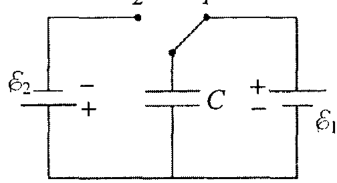


3.1.19. Два конденсатора, заряженные до одного и того же напряжения, имеют энергии $W_1 = 10^{-3}$ Дж и $W_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ Дж. Разноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили с помощью двух проводников. Какая энергия W выделилась при разрядке конденсаторов?

Решение. Пусть C_1 и C_2 – емкости конденсаторов, U_0 – напряжение, до которого они заряжены. Тогда заряды на конденсаторах $q_1 = C_1 U_0$, $q_2 = C_2 U_0$, а их энергии $W_1 = \dfrac{C_1 U_0^2}{2}$, $W_2 = \dfrac{C_2 U_0^2}{2}$.

После соединения разноименно заряженных пластин модуль заряда на каждой паре пластин будет $q = |q_1 - q_2| = |C_1 - C_2| U_0$. Следовательно, энергия конденсаторов после перезарядки $W' = \dfrac{q^2}{2(C_1 + C_2)} = \dfrac{(C_1 - C_2)^2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)}$. Изменение энергии конденсаторов в процессе перезарядки равно выделившейся энергии: $W = W_1 + W_2 - W'$. После несложных преобразований находим, что $W = \dfrac{4U_0^2 C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} = \dfrac{4W_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Учитывая, что $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{W_1}{W_2}$, получаем ответ: $W = \dfrac{4W_1 W_2}{W_1 + W_2} = 3 \cdot 10^{-3}$ Дж.

При решении этой задачи полезно ответить на вопрос, что будет происходить в системе при $W_1 = W_2$. Кроме того, следует отметить, что энергия при разрядке конденсаторов выделяется в общем случае не только в виде джоулева тепла в проводниках, но и в виде электромагнитного излучения. Соотношение между ними зависит от сопротивления проводников.



3.1.20. В схеме, изображенной на рисунке, ключ находился достаточно долго в положении *1*. Какое количество теплоты Q выделится в источнике $\mathcal{E}_2$ после переключения ключа в положение *2*? Емкость конденсатора $C = 20$ мкФ, ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В. Сопротивлением соединительных проводов и ключа, а также потерями на излучение пренебречь.

Решение. При исходном положении ключа заряд на нижней пластине конденсатора и его энергия равны соответственно: $q_1 = -C\mathcal{E}_1$, $W_1 = \dfrac{C\mathcal{E}_1^2}{2}$. После переключения ключа в положение *2* заряд нижней пластины и энергия конденсатора станут равными $q_2 = +C\mathcal{E}_2$, $W_2 = \dfrac{C\mathcal{E}_2^2}{2}$. При перемещении по цепи заряда $\Delta q = q_2 - q_1$ источник $\mathcal{E}_2$ совершает работу $A = \mathcal{E}_2 \Delta q$, которая расходуется на изменение энергии конденсатора и на выделение в источнике теплоты: $A = W_2 - W_1 + Q$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $Q = \dfrac{C(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{2} = 2{,}25$ мДж.

При решении этой задачи следует внимательно проанализировать перемещение зарядов при переключении ключа. Ошибка в знаке заряда может привести к неправильному ответу.

3.1.21. Два конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ соединены последовательно и постоянно подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какое количество теплоты Q выделится в этом резисторе в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора заряды на конденсаторах были одинаковы?

Решение. В начальном состоянии заряд на каждом конденсаторе $q = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}$, энергия системы $W_0 = \dfrac{q^2}{2C_1} + \dfrac{q^2}{2C_2} = \dfrac{C_1 C_2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

При подключении резистора к конденсатору C_2 этот конденсатор полностью разрядится, а конденсатор C_1 зарядится до напряжения $\mathcal{E}$. Конечная энергия системы $W = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2}$. При перезарядке конденсаторов источник переместит по цепи заряд $q = \left(C_1 - \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\right)\mathcal{E}$, совершив работу $A = q\mathcal{E} = \frac{C_1^2\mathcal{E}^2}{C_1 + C_2}$. По закону сохранения энергии $A + W_0 = W + Q$. Отсюда $Q = \frac{C_1^2\mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Было бы ошибкой считать, что изменение энергии системы равно количеству выделившейся теплоты, и не учесть работу источника. Кроме того, важно понимать, что источник совершает отрицательную работу, так как заряд проходит через источник против направления сторонних сил.

3.1.22. Два плоских конденсатора имеют одинаковую емкость. В один из них вставили пластинку с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$, заполняющую весь объем между обкладками, и зарядили этот конденсатор так, что запасенная в нем энергия составила $W_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж. Отсоединив источник, пластинку удалили, и к заряженному конденсатору параллельно подсоединили второй, незаряженный конденсатор. Найти энергию W, которая будет запасена в конденсаторах после их перезарядки.

Решение. Пусть C_0 – емкость пустого конденсатора. Энергия заряженного конденсатора, заполненного диэлектриком, выражается через заряд q на нем, как $W_0 = \frac{q^2}{2\varepsilon C_0}$. При вытаскивании диэлектрической пластинки из конденсатора, отключенного от источника, заряд на конденсаторе не изменяется, поэтому энергия конденсатора становится равной $W_1 = \frac{q^2}{2C_0} = \varepsilon W_0$. Увеличение энергии в ε раз происходит за счет работы, совершенной при удалении пластинки (диэлектрик втягивается внутрь заряженного конденсатора). Когда к заряженному конденсатору подсоединили такой же незаряженный, емкость системы удвоилась, а заряд остался прежним. Следовательно, энергия системы в конечном состоянии равна $W = \dfrac{q^2}{2 \cdot 2C_0} = \dfrac{\varepsilon W_0}{2}$. Уменьшение энергии конденсаторов в процессе их перезарядки связано с выделением теплоты при перемещении зарядов по соединительным проводам. Отсюда $W = \dfrac{\varepsilon W_0}{2} = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж.

При решении подобных задач следует иметь в виду, что если заряженный конденсатор отключен от источника, то постоянным будет оставаться заряд на обкладках. Если же конденсатор подключен к источнику, то постоянной будет оставаться разность потенциалов между обкладками.

3.1.23. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В, состоит из двух квадратных обкладок площадью $S = 100\ \text{см}^2$ каждая, расположенных на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Между обкладками расположена диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$, заполняющая весь объем конденсатора. Пластинку начинают выдвигать вдоль одной из сторон конденсатора с постоянной скоростью. Какой по величине заряд q протечет в цепи источника, если пластинку полностью выдвинуть из конденсатора?

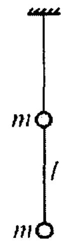
Решение. Пусть пластинка выдвинута из конденсатора на расстояние x. Емкость конденсатора и заряд на нем при этом будут: $C(x) = \dfrac{ax\varepsilon_0}{d} + \dfrac{a(a-x)\varepsilon_0\varepsilon}{d} = \dfrac{a\varepsilon_0}{d}\big(a\varepsilon - x(\varepsilon - 1)\big)$, $\quad q(x) = C(x)\mathcal{E}$,

где $a = \sqrt{S}$. За малый промежуток времени пластинка переместится на расстояние Δx, и заряд конденсатора уменьшится на величину $\Delta q = \dfrac{a\varepsilon_0\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1)v_0\Delta t$. Учитывая, что при полном вынимании пластинки из конденсатора $\Delta x = a$, получаем ответ:

$$q = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1) \approx 35 \text{ нКл}.$$

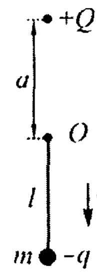
При решении таких задач стоит учесть, что конденсатор, из которого выдвинута диэлектрическая пластина на расстояние x, можно представить, как два параллельно соединенных конденсатора, один из которых воздушный (продольный размер его обкладок x), а другой, с продольным размером обкладок $a-x$, заполнен диэлектриком.

Задачи для самостоятельного решения



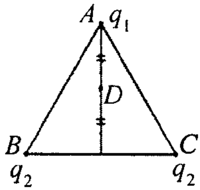
3.1.24. Два одинаковых маленьких шарика массами $m = 10$ г, заряженные одинаковыми зарядами $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, закреплены на непроводящей нити, подвешенной на штативе. При какой длине l отрезка нити между шариками оба отрезка нити (верхний и нижний) будут испытывать одинаковое натяжение? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $l = \dfrac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}} \approx 0{,}6$ м.



3.1.25. Маятник, состоящий из жёсткого невесомого стержня длиной l и закреплённого на его конце груза массой m с зарядом $-q$, подвешен в точке O (см. рисунок). Над точкой O на расстоянии a от неё находится заряд $+Q$. В каком случае состояние равновесия, при котором груз массой m находится в наинизшем положении, является устойчивым? Будет ли положение равновесия устойчивым при $l = 40$ см, $m = 10$ г, $|q| = 120$ нКл, $a = 20$ см, $Q = 50$ мкКл? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: положение равновесия устойчиво, если $mg > \dfrac{|q|Qa}{4\pi\varepsilon_0(a+l)^3}$; при заданных параметрах положение равновесия будет устойчивым.

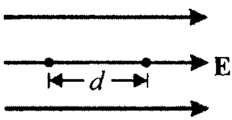


3.1.26. Три положительных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника ABC. Величина заряда, находящегося в точке A, равна q_1; величины зарядов в точках B и C равны q_2. Найти отношение $\alpha = q_2 / q_1$, если напряженность электрического поля, создаваемого этими тремя зарядами в точке D, лежащей на середине высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, равна нулю.

Ответ: $\alpha = \dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{7}{6}\sqrt{\dfrac{7}{3}} \approx 1{,}8$.

3.1.27. В окружность радиусом $R = 3$ см с центром в точке O вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. В шести вершинах восьмиугольника помещены одинаковые положительные заряды так, что вектор $\mathbf{E}_0$ напряженности в точке O направлен по отрезку OH. Чему равен модуль вектора напряженности поля E_0, если величина каждого из зарядов $q = 10^{-9}$ Кл? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $E_0 = \dfrac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 14{,}1$ кВ.



3.1.28. Две заряженные частицы помещены в однородное электрическое поле напряженностью $E = 190$ В/м. Частица массой $m = 40$ мг несет отрицательный заряд $q = -10$ нКл, а частица массой $M = 0{,}1$ г – положительный заряд $Q = 40$ нКл. На каком расстоянии d друг от друга нужно расположить частицы, чтобы при их движении из состояния покоя расстояние между частицами оставалось неизменным? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $d = \sqrt{\dfrac{|q|Q(m+M)}{4\pi\varepsilon_0 E(mQ + M|q|)}} = 1{,}0$ м.

3.1.29.[Е] Две параллельные неподвижные диэлектрические пластины расположены вертикально и заряжены разноименно. Пластины находятся на расстоянии $d = 2$ см друг от друга. Напряженность поля в пространстве между пластинами равна $E = 4 \cdot 10^5$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом $q = 10^{-10}$ Кл и массой $m = 20$ мг. После того как шарик отпустили, он начинает падать и ударяется об одну из пластин. На сколько уменьшится высота местонахождения шарика Δh к моменту его удара об одну из пластин?

Ответ: $\Delta h = \dfrac{mgd}{2qE} = 0{,}05$ м.

3.1.30. На тонкий гладкий горизонтальный диэлектрический стержень надеты две маленькие бусинки с зарядами $+q = 60$ мкКл и $-q = -60$ мкКл, скрепленные между собой диэлектрической пружиной. Вся система находится в однородном электростатическом поле напряженностью $E = 246$ кВ/м, силовые линии которого параллельны стержню. При этом пружина не деформирована. Если изменить направление поля на противоположное, оставив неизменной величину его напряженности E, то длина пружины при равновесии уменьшится в 2 раза. Пренебрегая поляризацией диэлектриков, найти коэффициент жесткости пружины. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $k = 20\sqrt{\pi \varepsilon_0 q E^3} \approx 100$ Н/м.

3.1.31. Расстояние между двумя одинаковыми металлическими шариками $l = 1{,}5$ м намного больше их радиусов. Когда на шарики поместили некоторые заряды, сила отталкивания между ними оказалась равной $F_1 = 4{,}1$ мкН. После того, как шарики соединили тонкой проволокой, а затем убрали ее, шарики стали отталкиваться с силой $F_2 = 5$мкН. Определить первоначальные заряды шариков q_1 и q_2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $q_1 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_2 - F_1}\right) \approx 50$ нКл,

$q_2 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_2 - F_1}\right) \approx 20$ нКл.

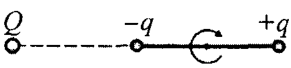
3.1.32. Три незаряженные концентрические проводящие сферы радиусами $r = 14{,}5$ см, $2r$ и $3r$ находятся в вакууме. В центр сфер поместили точечный заряд $q = 20$ нКл, а затем среднюю сферу заземлили тонким длинным изолированным проводом, пропущенным через небольшое отверстие в сфере радиусом $3r$. Найти разность потенциалов между внутренней и наружной сферами. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 r} \approx 620$ В.

3.1.33.[Е] При лечении электростатическим душем к электродам прикладывается разность потенциалов $\Delta\varphi = 10^5$ В. Какой заряд q проходит между электродами за время процедуры, если известно, что электрическое поле совершает при этом работу, равную $\Delta A = 1800$ Дж? Ответ выразите в мКл.

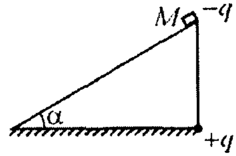
Ответ: $q = \dfrac{\Delta A}{\Delta\varphi} \approx 18$ мКл.

3.1.34. Два маленьких шарика, несущие заряды $+q = 10$ нКл и $-q$, закреплены на концах непроводящего стержня длиной $2l = 10$ см. Система находится в электрическом поле неподвижного точечного заряда $Q = 25$ нКл, удаленного от центра стержня на расстояние $L = 25$ см. Первоначальное расположение шариков показано на рисунке. Какую работу A нужно совершить, чтобы повернуть стержень на $180°$ вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр? Силу тяжести не учитывать. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



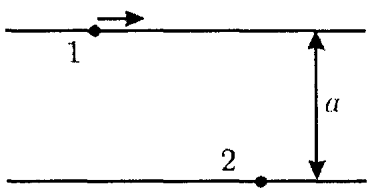
Ответ: $A = \dfrac{Qql}{\pi\varepsilon_0 (L^2 - l^2)} \approx 7{,}5$ мкДж.

3.1.35. По наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, соскальзывает с высоты $h = 50$ см небольшое тело, заряженное отрицательным зарядом $q = -4$ мкКл. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием наклонной плоскости находится положительный заряд $+q$. Определить скорость v, с которой тело достигнет основания наклонной плоскости. При каких значениях h тело не достигнет основания наклонной плоскости? Масса тела $M = 100$ г, ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2. Трением пренебречь. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



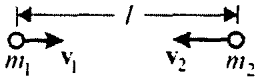
Ответ: $v = \sqrt{2gh - \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 Mh}(1 - \operatorname{tg}\alpha)} \approx 2{,}75$ м/с. Тело не достигнет основания наклонной плоскости при $h < \dfrac{|q|}{2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\pi\varepsilon_0 Mg}} \approx 0{,}25$ м.

3.1.36. На два гладких длинных стержня, расположенных параллельно друг другу на расстоянии $a = 10$ см, нанизаны две одноимённо заряженные бусинки, которые могут двигаться по стержням без трения (см. рисунок). В начальный момент времени



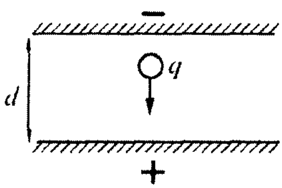
вторая бусинка покоится, а первую пустили издалека по направлению ко второй бусинке. При каких начальных скоростях v_0 первой бусинки она обгонит вторую в процессе своего движения? Массы бусинок $m = 1$ г, заряды $q = 55$ нКл.

Ответ: $v_0 > \dfrac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 ma}} \approx 1$ м/с.



3.1.37. Два маленьких шарика массами $m_1 = 6$ г и $m_2 = 4$ г несут заряды $q_1 = 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл соответственно. В начальный момент они движутся навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры. При этом расстояние между шариками составляет $l = 2$ м, и их скорости равны $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с соответственно. На какое минимальное расстояние L приблизятся шарики друг к другу? Силу тяжести не учитывать. Электрическую постоянную принять равной $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Ответ: $L = \dfrac{l}{1 + \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}} \approx 1{,}35$ м.



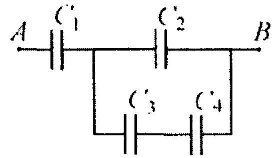
3.1.38.[E] Пластины большого по размерам плоского конденсатора расположены горизонтально на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Напряжение на пластинах конденсатора $U = 5000$ В. В пространстве между пластинами падает капля жидкости. Масса капли $m = 4 \cdot 10^{-6}$ кг. При каком значении заряда q капли ее скорость будет постоянной? Влиянием воздуха на движение капли пренебречь. Ответ выразите в пикоКулонах.

Ответ: $q = \dfrac{mgd}{U} = 80$ пКл.

3.1.39. Два плоских конденсатора заряжены: первый до разности потенциалов $U_1 = 300$ В, второй – до разности потенциалов $U_2 = 200$ В. Площади пластин конденсаторов соответственно: $S_1 = 0{,}06$ см^2 у первого и $S_2 = 0{,}04$ см^2 у второго, расстояние между пластинами у обоих конденсаторов одинаково. Чему будет равно напряжение на конденсаторах U, если соединить их одноименно заряженные обкладки?

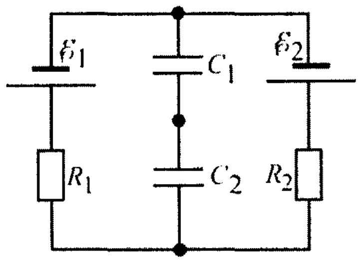
Ответ: $U = \dfrac{U_1 S_1 + U_2 S_2}{S_1 + S_2} = 260$ В.

3.1.40. В схеме, показанной на рисунке, емкости конденсаторов равны: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 4$ мкФ. Напряжение между точками A и B равно $U = 100$ В. Найти напряжение U_4 на конденсаторе C_4. Первоначально конденсаторы были не заряжены.



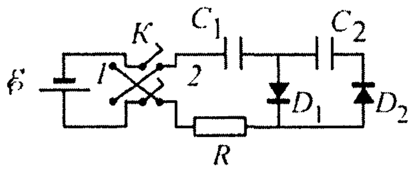
Ответ: $U_4 = \dfrac{C_1 C_3 U}{C_3 C_4 + (C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \approx 9{,}1$ В.

3.1.41. Найти заряд конденсатора C_1 в схеме, показанной на рисунке. Параметры элементов схемы: $C_1 = 100$ нФ, $C_2 = 150$ нФ, $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $R_1 = 1$ Ом, и $R_2 = 1{,}5$ Ом.



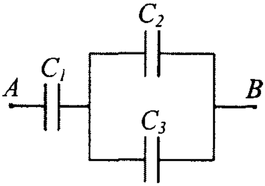
Ответ:
$q = \dfrac{C_1 C_2 (\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)} = 144$ нКл.

3.1.42. В схеме, показанной на рисунке, все конденсаторы разряжены, а двойной ключ K находится в разомкнутом состоянии. Его перевели в положение *1*, а затем, спустя достаточно



большое время, – в положение *2*. Параметры элементов схемы указаны на рисунке. Считая диоды D_1 и D_2 идеальными, найти заряд, который установится на конденсаторе C_2. Параметры элементов схемы: $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 30$ мкФ, $\mathcal{E} = 2$ В.

Ответ: $q_{22} = \dfrac{2 C_1 C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2} = 48$ мкКл.



3.1.43. Первоначально незаряженные конденсаторы, емкости которых C_1, C_2 и C_3 неизвестны, соединены в цепь, как показано на рисунке. После подключения к точкам A и B источника оказалось, что напряжение на конденсаторе C_1 равно $U_1 = 100$ В, заряд на конденсаторе C_2 равен $q_2 = 10^{-4}$ Кл, а энергия конденсатора C_1 превышает энергию конденсатора C_3 в $m = 2$ раза. Найти емкость конденсатора C_2, если известно, что она в $n = 3$ раза меньше емкости конденсатора C_3.

Ответ: $C_2 = \dfrac{mnq_2}{(n+1)U_1} = 1{,}5$ мкФ.

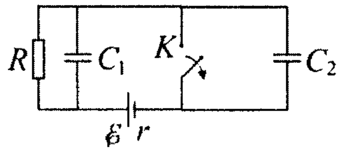
3.1.44. Два одинаковых плоских конденсатора, соединенных параллельно, зарядили до напряжения $U = 1000$ В и отключили от источника. Затем пластины одного из конденсаторов раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $k = 3$ раза. После этого пластины конденсатора замкнули проводником. Какая энергия Q выделилась в проводнике? Первоначальная емкость каждого конденсатора $C = 500$ пФ.

Ответ: $Q = 2CU^2 \cdot \dfrac{k}{k+1} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

3.1.45. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В последовательно подключены два конденсатора емкостями $C_1 = 10$ мкФ и $C_2 = 15$ мкФ. После зарядки конденсаторов источник отключают, а параллельно конденсатору C_1 через резистор подключают незаряженный конденсатор емкостью $C_3 = 14$ мкФ. Какое количество теплоты Q выделится на резисторе в процессе зарядки конденсатора C_3?

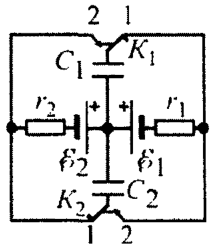
Ответ: $Q = \dfrac{C_1 C_2^2 C_3 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)^2 (C_1 + C_3)} = 4{,}2$ мкДж.

3.1.46. В цепи, схема которой изображена на рисунке, ключ K в течение длительного времени находился в замкнутом состоянии. В некоторый момент ключ разомкнули. Какое количество теплоты Q выделится в схеме после этого? Емкости конденсаторов: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, ЭДС источника $\mathscr{E} = 10$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.



Ответ: $Q = \dfrac{\mathscr{E}^2}{2}\left(C_2 + C_1\dfrac{R^2}{(R+r)^2}\right) = 1{,}32 \cdot 10^{-4}$ Дж.

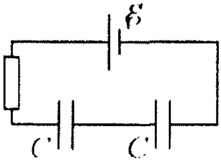
3.1.47. Какое количество теплоты выделится в схеме, показанной на рисунке, после одновременного переключения ключей K_1 и K_2 из положения 1 в положение 2? Параметры элементов схемы: $C_1 = 60$ мкФ, $C_2 = 40$ мкФ, $\mathscr{E}_1 = 10$ В, $\mathscr{E}_2 = 15$ В, $r_1 = 1$ Ом, и $r_2 = 2$ Ом.



Ответ: $\Delta Q = \dfrac{(C_1 + C_2)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)^2}{2} = 1{,}25$ мДж.

3.1.48. Плоский вакуумный конденсатор, расстояние между обкладками которого равно L, подключен к источнику напряжения с ЭДС $\mathscr{E}$. Между обкладками этого конденсатора находится плоскопараллельная диэлектрическая пластина с проницаемостью ε. Пластина параллельна обкладкам, ее толщина d, а площадь ее поверхностей, параллельных обкладкам, равна площади обкладок. В пластине возникает электрический пробой, если модуль напряженности электрического поля в ней превышает E_0. При какой толщине пластины не произойдет ее электрического пробоя? Произойдет ли электрический пробой пластины при $L = 1$ см, $\mathscr{E} = 10$ кВ, $\varepsilon = 10$, $d = 0{,}5$ см, $E_0 = 25$ кВ/мм?

Ответ. Пробоя не будет, если толщина пластины удовлетворяет неравенству: $d \le \dfrac{\varepsilon E_0 L - \mathcal{E}}{(\varepsilon - 1)E_0}$ при выполнении дополнительного условия $\dfrac{\mathcal{E}}{\varepsilon L} < E_0 < \dfrac{\mathcal{E}}{L}$. При $\varepsilon L E_0 \le \mathcal{E}$ пробой будет при любой, сколь угодно малой толщине пластины, а при $L E_0 > \mathcal{E}$ пробоя не будет даже при $d = L$. При заданных величинах пробоя пластины не произойдет.



3.1.49. В схеме, показанной на рисунке, ЭДС источника $\mathcal{E} = 60$ В, емкость каждого из конденсаторов $C = 10$ мкФ. Какой заряд q протечет через источник, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

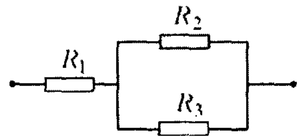
Ответ: $q = \dfrac{\mathcal{E}C}{2} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} = 10^{-4}$ Кл.

3.1.50. Два одинаковых незаряженных воздушных конденсатора, каждый из которых имеет емкость $C = 40$ мкФ, соединяют последовательно и подключают к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. После окончания зарядки, не отключая цепочку конденсаторов от батареи, все пространство между обкладками одного из конденсаторов медленно заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$. Найти работу, которую совершает батарея за время заполнения конденсатора диэлектриком.

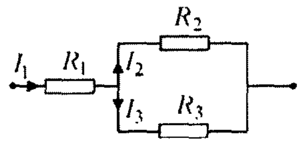
Ответ: $A = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$ = 1 мДж.

3.2. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

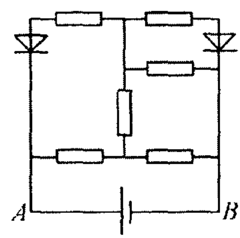


3.2.1. На рисунке изображен участок цепи постоянного тока, содержащий три резистора, сопротивления которых неизвестны. При этом через резистор R_1 протекает ток $I_1 = 1{,}6$ А, а напряжение на резисторе R_2 составляет $U_2 = 2$ В. Найти величину сопротивления R_3, если известно, что она в $n = 3$ раза превышает величину сопротивления R_2.



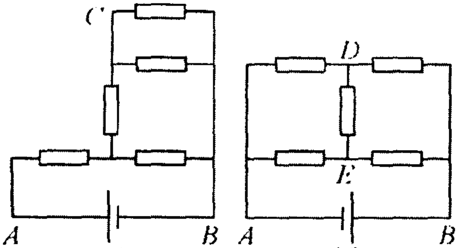
Решение. Обозначим токи, текущие в ветвях схемы, как показано на рисунке. Согласно правилу сложения токов в узлах и закону Ома для участка цепи, справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2 R_2$, $U_2 = I_3 R_3$, $R_3 = nR_2$. Разрешая ее относительно R_3, получаем ответ: $R_3 = (n-1)\dfrac{U_2}{I_1} = 5$ Ом.

Приступая к решению задачи, следует вспомнить формулы для параллельного и последовательного соединений проводников.



3.2.2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке, состоит из двух диодов, шести одинаковых резисторов и источника тока, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь. Во сколько раз k изменится ток через источник, если подключить его к точкам A и B с другой полярностью? Диоды считать идеальными.

Решение. При исходном подключении источника потенциал точки A выше потенциала точки C, в которой соединены два верхних резистора. В этом случае к левому диоду приложено запирающее напряжение, поэтому ток через него не течет. Эквивалентная схема в этом случае имеет вид, изображенный на рисунке (*а*).



(*а*) (*б*)

Согласно формулам для параллельного и последовательного сопротивления проводников, сопротивление цепи в этом случае равно $R' = \frac{8}{5}R$, где R – сопротивление отдельного резистора. При подключении источника с обратной полярностью потенциал точки B будет выше потенциала точки C, поэтому ток не будет течь через правый диод, и эквивалентная схема примет вид, изображенный на рисунке (*б*). В этом случае, в силу симметрии схемы разность потенциалов между точками D и E равна нулю, поэтому ток через центральный резистор не течет, и сопротивление всей цепи равно $R'' = R$. Поскольку напряжение на клеммах источника постоянно, искомое отношение токов через источник

$$k = \frac{I''}{I'} = \frac{R'}{R''} = 1{,}6\,.$$

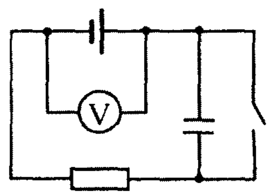
Следует обратить внимание, что при решении подобных задач бывает весьма полезным изобразить схему, эквивалентную заданной, с учетом только лишь тех ее участков, по которым будет течь ток.

3.2.3.[E] При коротком замыкании выводов гальванической батареи сила тока в цепи 0,45 А. При подключении к выводам батареи электрической лампы сила тока в цепи 0,225 А, а напряжение на лампе 4,5 В. Найдите ЭДС гальванической батареи.

Решение. Так как сила тока при коротком замыкании является конечной величиной, можно утверждать, что внутреннее сопротивление батареи отлично от нуля. Обозначим его через r, а сопротивление лампы через R. Тогда, в соответствии с законом Ома для полной цепи, получаем: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$ в случае короткого замыкания и $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}$ в случае подключения к выводам батареи лампы (здесь $I_1 = 0{,}45$ А и $I_2 = 0{,}225$ А). Из закона Ома для участка цепи напряжение на лампе составляет $U = I_2 R$. Решая полученную систему уравнений, находим: $\mathcal{E} = \dfrac{UI_1}{I_1 - I_2} = 9$ В.

Для того чтобы правильно решить эту задачу, нужно учесть, что батарея имеет ненулевое внутреннее сопротивление. Если про это забыть, то не удастся правильно записать исходную систему уравнений.

3.2.4.[E] Схема электрической цепи показана на рисунке. Когда цепь разомкнута, идеальный вольтметр показывает 8 В. При замкнутой цепи вольтметр показывает 7 В. Сопротивление внешней цепи равно 3,5 Ом. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?



Решение. При разомкнутой цепи вольтметр показывает ЭДС источника, равную $\mathcal{E} = 8$ В. Когда ключ замкнут, можно применить закон Ома для полной цепи: $\mathcal{E} = Ir + U$, где I – сила текущего в цепи тока, U – падение напряжения на резисторе сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, r – искомое внутреннее сопротивление источника. Как видно из схемы электрической цепи, при замкнутом ключе вольтметр показывает как раз падение напряжения на резисторе, то есть $U = 7$ В. Из закона Ома для участка цепи следует, что $U = IR$. Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$r = R\left(\frac{\mathcal{E}}{U} - 1\right) = 0{,}5 \text{ Ом}.$$

Следует отметить, что имеющийся в цепи конденсатор никак не влияет на процесс протекания в ней постоянного тока, поскольку он подсоединен параллельно ключу. Поэтому наличие конденсатора не нужно учитывать при записи уравнений, необходимых для решения задачи.

3.2.5.[E] Ученик исследовал зависимость показаний амперметра и вольтметра от длины проволоки x при движении скользящего контакта вправо (рисунок А). Зависимости показаний амперметра и вольтметра от длины x показана на рисунках Б и В. Чему равно внутреннее сопротивление r источника?

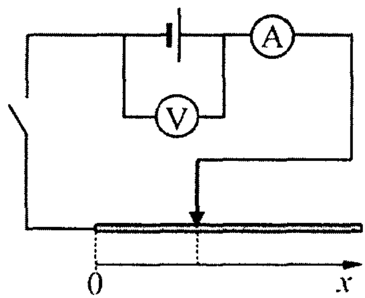


Рис. А

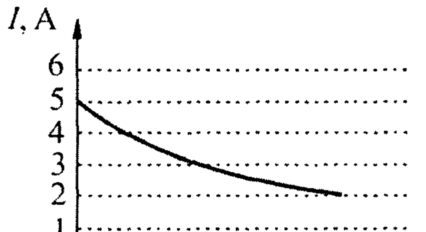


Рис. Б

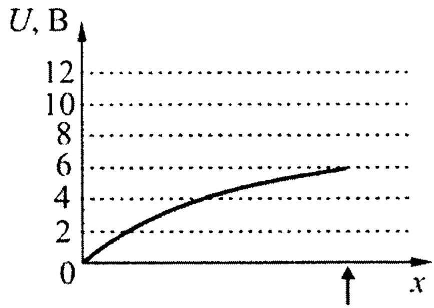


Рис. В

Решение. Для решения задачи нужно использовать закон Ома для полной электрической цепи: $I(x) = \dfrac{\mathcal{E}}{R(x)+r}$. Из него следует, что показания вольтметра $U(x) = I(x)R(x) = \mathcal{E} - I(x)r$ (здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС источника тока, $R(x)$ – сопротивление участка проволоки длиной x).

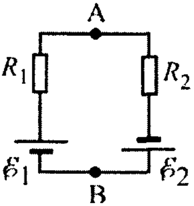
При $x = 0$ из графиков имеем: $0 = \mathcal{E} - I(0)r$, $\mathcal{E} = I(0)r$, где $I(0) = 5$ А.

При $x_{\max}$ получаем: $U(x_{\max}) = \mathcal{E} - I(x_{\max})r = \left(I(0) - I(x_{\max})\right)r$, где $U(x_{\max}) = 6$ В, $I(x_{\max}) = 2$ А.

Таким образом, внутреннее сопротивление источника равно

$$r = \frac{U(x_{\max})}{I(0) - I(x_{\max})} = \frac{6\ \text{В}}{5\ \text{А} - 2\ \text{А}} = 2\ \text{Ом}.$$

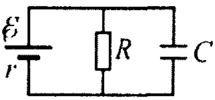
При решении этой задачи, во-первых, следует обратить внимание на графики экспериментальных зависимостей $I(x)$ и $U(x)$: будет полезным иметь представление о характере этих зависимостей. Кроме того, важно отметить, что для определения необходимых величин из экспериментальных данных одного графика было бы недостаточно.



3.2.6. В схеме, изображенной на рисунке, напряжение между точками A и B равно $U = 2$ В, а сопротивления резисторов R_1 и R_2 неизвестны. Каким будет напряжение V между точками A и B, если поменять местами резисторы R_1 и R_2? ЭДС источников равны $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 5$ В, внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

Решение. Согласно закону Ома для полной цепи, ток в цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}$. Применяя закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, имеем: $U = \mathcal{E}_1 - IR_1$ (при исходном подключении резисторов), $V = \mathcal{E}_1 - IR_2$ (когда резисторы поменяли местами). Подставив в эти равенства найденную выше силу тока, приведем их к виду: $U = \dfrac{\mathcal{E}_1 - k\mathcal{E}_2}{1+k}$, $V = \dfrac{k\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{1+k}$, где $k = \dfrac{R_1}{R_2}$. Исключая отсюда k, получаем ответ: $V = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - U = 3$ В.

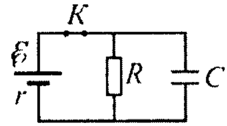
Будет полезным решить эту задачу, изменив полярность одного из источников.



3.2.7.[E] Какой должна быть ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, чтобы напряженность электрического поля в плоском конденсаторе была равна $E = 2$ кВ/м, если внутреннее сопротивление источника тока $r = 2$ Ом, сопротивление резистора $R = 10$ Ом, расстояние между пластинами конденсатора $d = 2$ мм (см. рисунок)?

Решение. Для решения задачи надо воспользоваться законом Ома для полной электрической цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$ и выражением для напряженности электрического поля в плоском конденсаторе $E = \dfrac{U}{d}$, где U – напряжение, до которого заряжен конденсатор и которое является падением напряжения на резисторе R, через который течет ток I. Поскольку согласно закону Ома для участка цепи $U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R+r} = Ed$, то $\mathcal{E} = \frac{Ed(R+r)}{R} = 4{,}8$ В.

При решении этой задачи важно понимать, что через резистор течет ток I, создающий падение напряжения U на конденсаторе.

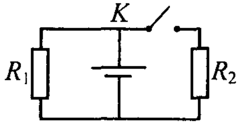


3.2.8.[E] В электрической схеме, показанной на рисунке, ключ K замкнут. Заряд конденсатора $q = 2$ мкКл, ЭДС батарейки $\mathcal{E} = 24$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 5$ Ом, сопротивление резистора $R = 25$ Ом. Найдите количество теплоты, которое выделяется на резисторе после размыкания ключа K в результате разряда конденсатора. Потерями на излучение пренебречь.

Решение. При замкнутом ключе K через резистор течет ток, сила I которого может быть найдена из закона Ома для полной цепи: $I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$. При этом разность потенциалов U между обкладками конденсатора равна падению напряжения на резисторе: $U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r+R}$. В соответствии с определением электрической емкости конденсатора, $C = \frac{q}{U} = \frac{q(r+R)}{\mathcal{E}R}$. После размыкания ключа на резисторе выделится в виде теплоты ΔQ вся энергия, запасенная в конденсаторе. Следовательно,

$$\Delta Q = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\mathcal{E}R}{2(r+R)} = 20 \text{ мкДж}.$$

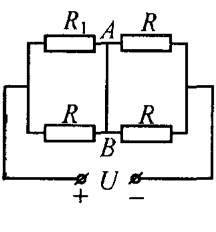
При решении этой задачи нужно понимать, что вычисленное значение ΔQ представляет собой максимально возможное количество теплоты, которое может выделиться на резисторе после размыкания ключа. На самом деле электрический ток, протекающий через резистор при разрядке конденсатора, будет изменяться, и поэтому часть энергии, запасенной в конденсаторе, преобразуется в энергию электромагнитных волн.



3.2.9. В схеме, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. Определить внутреннее сопротивление батареи r, если известно, что при разомкнутом ключе K через резистор R_1 течет ток $I_1 = 2{,}8$ А, а при замкнутом ключе K через резистор R_2 течет ток $I_2 = 1$ А.

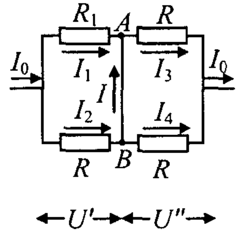
Решение. При разомкнутом ключе ток течет только в левом контуре цепи, для которого по закону Ома справедливо уравнение: $\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_1 r$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. При замкнутом ключе ток течет в обоих контурах, которые представляют собой два параллельно соединенных резистора. Обозначив через I полный ток через источник, имеем: $\mathcal{E} = I\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + Ir$. Ток I разветвляется на два тока: $I = I_1' + I_2$, причем $I_1' R_1 = I_2 R_2$. Выразим из этой системы ток I через I_2: $I = I_2\dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$. Объединяя записанные выражения, имеем: $I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2\dfrac{R_1 + R_2}{R_1} r$. Из последнего равенства легко получить ответ: $r = \dfrac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2\left(1 + (R_2 / R_1)\right) - I_1} = 4$ Ом.

При решении этой задачи важно понимать, что в случае разомкнутого и замкнутого ключа через сопротивление R_1 будет протекать различный ток.



3.2.10. В схеме, показанной на рисунке, напряжение на клеммах источника $U = 100$ В, сопротивления в цепи $R_1 = 101$ Ом, $R = 100$ Ом. Определить величину тока I, протекающего по проводнику AB. Сопротивлением подводящих проводов, проводника AB и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Решение. Полное сопротивление цепи R_0 можно найти, применяя формулы для сопротивлений последовательно и параллельно соединенных резисторов:

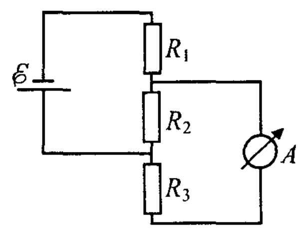


$$R_0 = \frac{R_1 R}{R_1 + R} + \frac{R}{2} = R \cdot \frac{3R_1 + R}{2(R_1 + R)}.$$

Согласно закону Ома ток I_0 в неразветвленной цепи равен $I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{U}{R} \cdot \frac{2(R_1 + R)}{3R_1 + R}$. Этот ток разветвляется на токи, показанные на рисунке, причем $I_1 + I = I_3$, $I_2 = I + I_4$. Учтем далее, что $I_3 R = I_4 R = U''$. Следовательно, $I_3 = I_4$. Исключая эти токи из полученной системы уравнений, выразим I через I_1 и I_2: $I = (I_2 - I_1)/2$. С другой стороны, $I_1 + I_2 = I_0$, $I_1 R_1 = I_2 R = U'$. Отсюда $I_1 = I_0 \frac{R}{R_1 + R}$, $I_2 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R}$. Следовательно, $I = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{R_1 - R}{R_1 + R}$. Подставляя сюда найденный ранее ток I_0, получаем ответ: $I = \frac{R_1 - R}{R + 3R_1} \cdot \frac{U}{R} \approx 2{,}5$ мА.

При решении этой задачи будет полезным вспомнить, что в каждом узле цепи сумма втекающих токов равна сумме вытекающих токов, иными словами, алгебраическая сумма всех токов в каждом узле равна нулю.

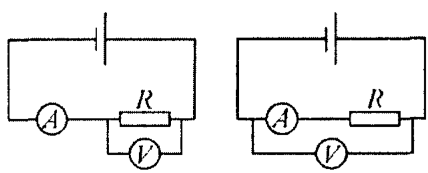
3.2.11. Какой ток I_1 покажет амперметр в схеме, показанной на рисунке? Какой ток I_2 покажет амперметр, если источник тока и амперметр поменять местами? $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $\mathscr{E} = 10$ В. Внутренними сопротивлениями источника тока и амперметра пренебречь.



Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах R_2 и R_3 совпадают друг с другом и равны произведению общего тока I, текущего в цепи источника, на сопротивление данного участка: $U = I\dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$. Ток I найдем, используя закон Ома для замкнутой цепи: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2R_3/(R_2 + R_3)} = \dfrac{\mathcal{E}(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$. Через амперметр и через резистор R_3 течет один и тот же ток $I_1 = \dfrac{U}{R_3}$. Объединяя записанные выражения, находим ток через амперметр в первом случае: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$. Анализ этого выражения показывает, что сопротивления резисторов R_1 и R_3 входят в него одинаково. Это означает, что если амперметр и источник поменять местами, ток через амперметр будет таким же. В этом можно убедиться, проделав расчет, аналогичный вышеизложенному. Отсюда $I_1 = I_2 = \dfrac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \approx 0{,}09$ А.

При решении этой задачи рекомендуется проанализировать, как изменится ответ, если источник тока будет обладать конечным внутренним сопротивлением *r*.

3.2.12. При включении приборов по схеме, изображенной на рисунке (*а*), амперметр показывает ток $I_1 = 1{,}06$ А, а вольтметр – напряжение $V_1 = 59{,}6$ В. При включении тех же приборов по схеме на рисунке (*б*) амперметр показывает ток $I_2 = 0{,}94$ А, а вольтметр –



(*а*) (*б*)

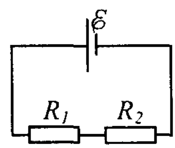
напряжение $V_2 = 60$ В. Определить сопротивление резистора R, считая напряжение на зажимах батареи неизменным.

Решение. Обозначим через R_A сопротивление амперметра, а через $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи, и воспользуемся законом Ома. Тогда для цепей, изображенных на рисунках, справедливы следующие уравнения: $I_1 R_A + V_1 = \mathcal{E}$ (для цепи на рисунке (*а*)), $I_2(R_A + R) = V_2$ (для цепи на рисунке (*б*)). Кроме того, по условию задачи $V_2 = \mathcal{E}$. Из этой системы легко найти ответ:

$$R = \frac{V_2}{I_2} - \frac{V_2 - V_1}{I_1} \approx 63{,}5 \text{ Ом}.$$

При решении этой задачи было бы неверным считать сопротивление амперметра равным нулю.

3.2.13. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору R_1, то он показывает напряжение $U_1 = 6$ В, если параллельно резистору R_2, то – напряжение $U_2 = 4$ В. Каковы будут падения напряжения V_1 и V_2 на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.



Решение. Обозначим через R_x сопротивление вольтметра. Если подключить вольтметр к резистору R_1, сопротивление всей цепи будет равно $R' = \dfrac{R_x R_1}{R_x + R_1} + R_1 = \dfrac{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}{R_x + R_1}$. По закону Ома для замкнутой цепи в ней будет течь ток $I' = \mathcal{E} / R'$, и напряжение на вольтметре, равное напряжению на резисторе R_1, определится, как $U_1 = I' \dfrac{R_x R_1}{R_x + R_1} = \dfrac{\mathcal{E} R_x R_1}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}$. Рассуждая аналогично, можно найти, что при подключении вольтметра к резистору R_2 напряжение на нем будет $U_2 = \dfrac{\mathcal{E} R_x R_2}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}$.

Из этих выражений находим, что $U_1/U_2 = R_1/R_2$. С другой стороны, если вольтметр не подключен, то напряжения на резисторах равны: $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$, где I – ток в цепи из двух последовательно соединенных резисторов. Отсюда следует, что $V_1/V_2 = R_1/R_2$. Сравнивая это отношение с найденным выше отношением напряжений на резисторах при подключенном вольтметре, находим, что $V_1/V_2 = U_1/U_2$. Кроме того, справедливо равенство $V_1 + V_2 = \mathcal{E}$. Выражая отсюда V_1 и V_2, получаем ответ:

$$V_1 = \frac{\mathcal{E}}{1+(U_2/U_1)} = 7{,}2\ \text{В},\quad V_2 = \mathcal{E} - V_1 = \frac{\mathcal{E}}{1+(U_1/U_2)} = 4{,}8\ \text{В}.$$

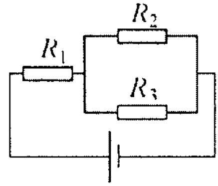
Данная задача является классическим примером задач на простейшие электрические цепи, при решении которых важно понимать, какие изменения происходят в цепи при включении того или иного прибора.

3.2.14. Две лампы имеют мощности $N_1 = 20$ Вт и $N_2 = 40$ Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в двадцативаттной лампе выделяется та же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность N_2' выделяется при этом в другой лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

Решение. Пусть U_0 – стандартное напряжение сети, R_1 и R_2 – сопротивления ламп. Поскольку $N_1 = \dfrac{U_0^2}{R_1}$, $N_2 = \dfrac{U_0^2}{R_2}$, справедливо соотношение: $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$. При последовательном подключении ламп в них выделяются мощности $N_1' = R_1 I^2$, $N_2' = R_2 I^2$, где I – ток в цепи. Отсюда следует, что $\dfrac{N_1'}{N_2'} = \dfrac{R_1}{R_2}$. Учитывая, что по условию $N_1' = N_1$, получаем ответ: $N_2' = \dfrac{N_1^2}{N_2} = 10$ Вт.

При решении этой задачи следует учитывать, что любой электроприбор развивает номинальную мощность, только если на его клеммы подано номинальное напряжение.

3.2.15. В схеме, показанной на рисунке, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Известно, что на сопротивлении R_1 выделяется мощность $N_1 = 25$ Вт. Какая мощность N_2 выделяется на сопротивлении R_2?



Решение. Обозначим через I_1, I_2 и I_3 токи, текущие через резисторы R_1, R_2 и R_3, соответственно. Для этих токов справедливы равенства: $I_1 = I_2 + I_3$, $I_2R_2 = I_3R_3$, откуда $I_2 = \dfrac{I_1R_3}{R_2 + R_3}$.

С другой стороны, $N_1 = I_1^2R_1$, $N_2 = I_2^2R_2$. Объединяя записанные выражения, находим ответ: $N_2 = N_1\dfrac{R_2R_3^2}{R_1(R_2 + R_3)^2} = 18$ Вт.

При решении этой задачи следует вспомнить формулу для расчета мощности $N = I^2R$, выделяющейся на сопротивлении R.

3.2.16. При подключении к батарее поочередно двух сопротивлений нагрузки $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 1$ Ом выделяющаяся в них мощность оказалась одинаковой и равной $N = 9$ Вт. Чему равна ЭДС $\mathcal{E}$ батареи?

Решение. Обозначив через r внутреннее сопротивление батареи и воспользовавшись законом Ома, запишем токи в цепи и мощности, выделяющиеся в резисторах в первом и во втором случаях:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad N_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2}R_1, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}, \quad N_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2}R_2.$$

По условию $N_1 = N_2$, откуда следует, что $R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2$, или $\sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r)$. Из последнего уравнения легко найти внутреннее сопротивление батареи: $r=\sqrt{R_1R_2}$. Следовательно, $N=\frac{\mathscr{E}^2R_1}{\left(R_1+\sqrt{R_1R_2}\right)^2}=\frac{\mathscr{E}^2R_2}{\left(R_2+\sqrt{R_1R_2}\right)^2}$. Выражая из одного из этих равенств ЭДС батареи $\mathscr{E}$, получаем ответ:

$$\mathscr{E}=\sqrt{N}\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)=9 \text{ В.}$$

При решении этой задачи было бы неверным пренебречь внутренним сопротивлением батареи. Следует понимать, что если внутреннее сопротивление батареи равно нулю, то напряжение на внешнем сопротивлении равно ЭДС батареи. В этом случае, поскольку ток, протекающий через сопротивление R_1 , меньше тока, протекающего через R_2 , условие одинаковой выделяемой мощности станет невозможным.

3.2.17. Аккумулятор отдает во внешнюю цепь мощность $N_1=10$ Вт при токе $I_1=4$ А. Какую мощность N_2 отдаст аккумулятор во внешнюю цепь при токе $I_2=8$ А? Внутреннее сопротивление аккумулятора $r=0{,}1$ Ом.

Решение. Различие между мощностями, выделяемыми во внешней цепи в первом и во втором случаях, связано с тем, что к аккумулятору подключают нагрузки с разными сопротивлениями. Обозначив через $\mathscr{E}$ ЭДС аккумулятора, имеем: $N_1=I_1(\mathscr{E}-I_1r)$, $N_2=I_2(\mathscr{E}-I_2r)$. Находя из первого уравнения ЭДС аккумулятора и подставляя ее во второе уравнение, получаем ответ: $N_2=\frac{I_2}{I_1}\left(N_1-I_1r(I_2-I_1)\right)=16{,}8$ Вт.

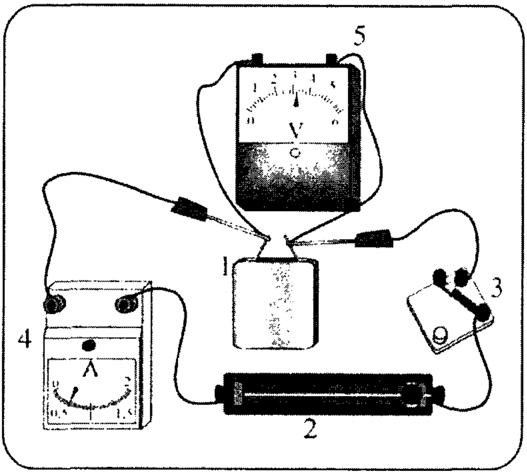
При решении этой задачи следует обратить особое внимание на причину, по которой изменяется ток во внешней цепи – подключение к аккумулятору разных нагрузок.

3.2.18. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом нагревательный элемент развивает мощность $N_1 = 50$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $N_2 = 72$ Вт. Найти сопротивление R нагревателя.

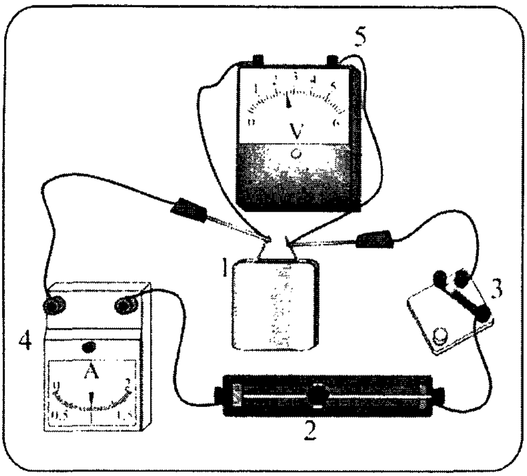
Решение. Мощность, развиваемая нагревательным элементом сопротивлением R, подключенным к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, равна $N_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}$. При подключении этого же элемента к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, значения ЭДС и внутреннего сопротивления удваиваются, и нагреватель развивает мощность $N_2 = \dfrac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2}$. Составим отношение: $\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{4(r+R)^2}{(2r+R)^2}$, или $\sqrt{\dfrac{N_2}{N_1}} = \dfrac{2(r+R)}{2r+R}$. Выражая из последнего соотношения R, получаем ответ: $R = 2r\dfrac{\sqrt{N_2/N_1}-1}{2-\sqrt{N_2/N_1}} = 1$ Ом.

При решении этой задачи следует обратить внимание на то, что при последовательном соединении источников их общая ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС источников. Будет полезным решить эту задачу, считая, что источники соединены параллельно.

3.2.19$^{\text{E}}$. Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из батарейки (1), реостата (2), ключа (3), амперметра (4) и вольтметра (5). После этого он провел измерения напряжения на полюсах и силы тока в цепи при различных сопротивлениях внешней цепи (см. рисунки). Определите ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батарейки, а также КПД η источника в первом опыте.



Опыт 1



Опыт 2

Решение. Для решения задачи надо воспользоваться законом Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, или $\mathcal{E} = U + Ir$. На фотографиях видно, что в первом опыте $U_1 = 3{,}2$ В, $I_1 = 0{,}5$ А, а во втором $U_2 = 2{,}6$ В, $I_2 = 1$ А. Таким образом, получаем систему из двух уравнений: $\mathcal{E} = U_1 + I_1 r$, $\mathcal{E} = U_2 + I_2 r$, решая которую, получаем ответы на два первых вопроса задачи:

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = 1{,}2 \text{ Ом}, \qquad \mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} = 3{,}8 \text{ В}.$$

Для ответа на третий вопрос надо воспользоваться определением КПД источника тока: КПД равен отношению полезной мощности $I_1 U_1$, выделяющейся в нагрузке – реостате, к мощности $\mathcal{E} I_1$, затрачиваемой источником: $\eta = \dfrac{I_1 U_1}{I_1 \mathcal{E}} = \dfrac{U_1}{\mathcal{E}} \approx 84\%$.

При решении этой задачи будет полезным изобразить электрические схемы собранных электрических цепей. Кроме того, в решении легко допустить ошибку, неверно определив КПД источника тока.

3.2.20. Напряжение на зажимах генератора постоянного тока $U_0 = 220$ В, а на зажимах нагрузки $U_1 = 210$ В. Определить мощность $N_л$, выделяющуюся в линии между генератором и нагрузкой, если номинальная мощность нагрузки при напряжении на ней, равном U_0, составляет $N = 10$ кВт.

Решение. Обозначим через R сопротивление нагрузки. Поскольку номинальная мощность нагрузки N при напряжении на ней U_0 равна $N = U_0^2 / R$, то $R = \dfrac{U_0^2}{N}$. При напряжении U_1 мощность, выделяющаяся в нагрузке, $N_1 = \dfrac{U_1^2}{R} = \dfrac{U_1^2}{U_0^2} N$. С другой стороны, эту мощность можно выразить через ток I через нагрузку: $N_1 = U_1 I$. Отсюда: $I = \dfrac{N_1}{U_1} = \dfrac{U_1}{U_0^2} N$. Такой же ток течет и в линии между генератором и нагрузкой. Поскольку падение напряжения в линии равно $\Delta U = U_0 - U_1$, мощность, выделяющаяся в ней, есть $N_л = (U_0 - U_1) I$. Подставляя сюда найденное значение тока, получаем ответ: $N_л = \dfrac{(U_0 - U_1) U_1}{U_0^2} N \approx 434$ Вт.

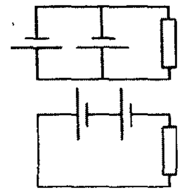
При решении этой задачи следует учесть, что рассматриваемая электрическая цепь представляет собой последовательно соединенные нагрузку и линию электропередачи.

3.2.21. Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, сопротивление которой равно $r = 1$ Ом. Какая максимальная мощность $N_{\max}$ может быть выделена в нагрузке, если ЭДС генератора $\mathcal{E} = 220$ В? Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

Решение. Мощность, развиваемая генератором, равна $N = \mathcal{E}I$, где I – сила тока в цепи. Мощность, выделяющаяся в линии, $N_{л} = I^2 r$. Следовательно, мощность, выделяющаяся в нагрузке, $N_{н} = N - N_{л} = \mathcal{E}I - I^2 r$. Поскольку $N_{н}$ обращается в нуль при значениях силы тока $I_1 = 0$ и $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$, максимум квадратичной зависимости $N_{н}(I)$ достигается при силе тока в цепи, равной $I_0 = \dfrac{I_1 + I_2}{2} = \dfrac{\mathcal{E}}{2r}$. Подставляя это значение силы тока в выражение для мощности в нагрузке, получаем ответ:

$$N_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 12{,}1 \text{ кВт}.$$

При решении этой задачи было бы полезным проанализировать выражение для мощности, выделяющейся в нагрузке сопротивлением R, а именно: $N_{н} = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$. Нетрудно установить, что максимум этого выражения достигается при $R = r$. Следовательно, ответ $N_{\max} = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4r}$ можно получить и таким путем.



3.2.22. Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных гальванических элементов нагружена на внешнее сопротивление $R = 1$ Ом. После того, как элементы соединили последовательно, мощность, выделяемая во внешнем сопротивлении, увеличилась в $n = 2$ раза. Чему равно внутреннее сопротивление r каждого из элементов?

Решение. Пусть $\mathscr{E}$ – ЭДС одного элемента. Мощности, выделяющиеся во внешнем сопротивлении при параллельном и последовательном соединении элементов, равны, соответственно: $N_1 = \dfrac{\mathscr{E}^2 R}{(R + r/2)^2}$, $N_2 = \dfrac{4\mathscr{E}^2 R}{(R + 2r)^2}$, причем по условию $N_2 = nN_1$.

Отсюда $r = R\dfrac{2 - \sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1} \approx 0{,}32$ Ом.

Следует обратить внимание на то, что в цепи есть источники ЭДС, обладающие внутренним сопротивлением, Поэтому пользоваться для определения мощности формулой $N = I^2 R$ было бы неправильно.

3.2.23. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ разряжается через цепь из двух параллельно включенных сопротивлений $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 40$ Ом. Какое количество теплоты Q_1 выделится на меньшем из сопротивлений, если конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = 100$ В?

Решение. В процессе разрядки конденсатора напряжение на нем плавно изменяется от U_0 до нуля. При этом отношение мгновенных мощностей, выделяющихся в параллельно соединенных резисторах, равно $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$, т.е. не зависит от времени. Следовательно, такое же отношение справедливо и для количеств теплоты, выделившихся в резисторах за время полной разрядки конденсатора. Имеем: $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$. По закону сохранения энергии

$Q_1 + Q_2 = W_0$, где $W_0 = \dfrac{CU_0^2}{2}$ – энергия, запасенная в конденсаторе. Из этих равенств получаем ответ:

$$Q_1 = \frac{CU_0^2}{2(1+(R_1/R_2))} = 4\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Было бы полезным обдумать ответ на вопрос, при каких условиях можно приравнять отношение мгновенных мощностей, выделяющихся в резисторах, отношению энергий, выделившихся в них за конечное время.

3.2.24. Какую максимальную полезную мощность можно получить, имея в своем распоряжении источник с ЭДС $\mathcal{E} = 45$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом и два электронагревателя с сопротивлениями $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 20$ Ом соответственно?

Решение. Мощность, выделяющаяся в нагрузке сопротивлением $R_н$, подключенной к источнику, равна $N = \dfrac{\mathcal{E}^2 R_н}{(R_н + r)^2}$. В качестве нагрузки могут выступать нагреватели, подключенные по отдельности: $R_н = R_1$ и $R_н = R_2$; нагреватели, подключенные последовательно: $R_н = R_3 = R_1 + R_2$; нагреватели, подключенные параллельно: $R_н = R_4 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Подстановка чисел дает: $N_1 = 45$ Вт, $N_2 = 45$ Вт, $N_3 \approx 41{,}3$ Вт, $N_4 \approx 41{,}3$ Вт. Отсюда получаем ответ: максимальная мощность выделяется во внешней цепи, если подключать нагреватели по отдельности. Эта мощность равна $N_1 = N_2 = 45$ Вт.

Следует обратить внимание на то, что при решении этой задачи может возникнуть ошибочное мнение о том, что при подключении любых сопротивлений по отдельности, мощность, выделяющаяся в этих нагрузках, будет одинаковой, или же, что мощность, выделяющаяся при последовательном и параллельном подключении двух нагрузок, тоже будет одинаковой. Стоит отметить, что полученный результат справедлив лишь при конкретных числовых значениях величин, заданных в условии задачи.

3.2.25. Определите среднюю скорость движения электронов в медном проводе сечением $S = 1$ мм^2, когда по нему течёт ток $I = 1$ А. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3, молярная масса $M = 64$ г/моль. Известно, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Решение. В рамках классической электронной теории электропроводности считается, что в металле свободные электроны, участвуя в хаотическом тепловом движении, ускоряются электрическим полем, сталкиваются с ионами кристаллической решётки и движутся с небольшой средней, так называемой «дрейфовой» скоростью.

Поскольку на каждый атом меди приходится один свободный электрон, то их концентрация в проводе равна числу атомов меди в единице объёма: $n = \rho N_A / M$. Заряд, протекающий через сечение провода за время Δt, равен $\Delta q = n \cdot Sv\Delta t \cdot |e|$, где $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – модуль заряда электрона, v – искомая средняя скорость движения электронов. Отсюда с учётом того, что $I = \Delta q / \Delta t$, получаем: $v = \dfrac{IM}{\rho S |e| N_A} \approx 0{,}075$ мм/с.

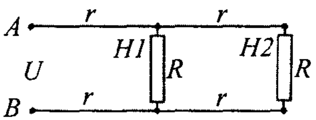
Отметим, что при решении этой задачи была получена формула, связывающая силу протекающего в проводнике тока со средней скоростью упорядоченного движения носителей заряда и с их концентрацией: $I = |e| nvS$. Эта формула часто оказывается полезной для отыскания решения задач подобной тематики.

3.2.26. В электролитической ванне, подключенной к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 3{,}35$ В, производят покрытие деталей никелем. Для получения на одной из деталей слоя никеля толщиной $h = 2$ мкм источником была совершена работа $A = 0{,}054$ кВт·ч. Какова площадь поверхности S этой детали? Плотность никеля $\rho = 8{,}8$ г/см^3, молярная масса $M = 59$ г/моль, валентность $n = 2$, постоянная Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Решение. По закону Фарадея масса выделившегося на катоде никеля $m = \dfrac{1}{F}\dfrac{M}{n}q$, где q – заряд, протекший через электролит. С другой стороны, $m = \rho Sh$. Совершенная источником работа по перемещению заряда q равна $A = q\mathcal{E}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $S = \dfrac{MA}{F\mathcal{E}\rho hn} \approx 1$ м^2.

Следует отметить, что запись формулы $m = \rho Sh$ подразумевает тот факт, что осаждение никеля происходит по всей поверхности детали равномерно.

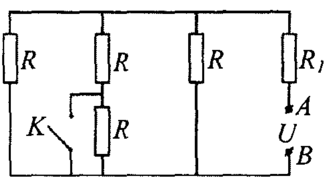
Задачи для самостоятельного решения



3.2.27. Два одинаковых нагревателя $H1$ и $H2$ сопротивлениями $R = 100$ Ом каждый подключены к источнику постоянного тока по схеме, изображенной на рисунке. Сопротивление каждого из отрезков подводящих проводов $r = 13$ Ом. Каковы напряжения U_1 и U_2 на нагревателях, если напряжение между точками A и B равно $U = 50$ В?

Ответ: $U_1 = \dfrac{UR(R+2r)}{R^2 + 6Rr + 4r^2} \approx 34{,}1$ В,

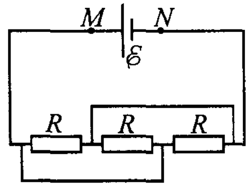
$$U_2 = \frac{UR^2}{R^2 + 6Rr + 4r^2} \approx 27{,}1 \text{ В}.$$



3.2.28. Цепь, изображенная на рисунке, составлена из 4 одинаковых резисторов сопротивлением $R = 7{,}5$ Ом и резистора $R_1 = 1$ Ом. На клеммах A и B поддерживается постоянное напряжение $U = 14$ В. На какую величину ΔI изменится сила тока, текущего через резистор R_1, после замыкания ключа K? Сопротивлением проводов и ключа пренебречь.

Ответ: $\Delta I = \dfrac{UR}{(3R_1 + R)(5R_1 + 2R)} = 0{,}5$ А.

3.2.29. Батарея с ЭДС $\mathscr{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом присоединена к цепи, изображенной на рисунке. Сопротивление каждого из резисторов $R = 1$ Ом. Найти напряжение U_{MN} на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.

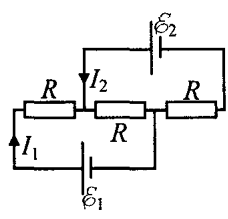


Ответ: $U_{MN} = \dfrac{\mathscr{E} R}{3r + R} \approx 1{,}54$ В.

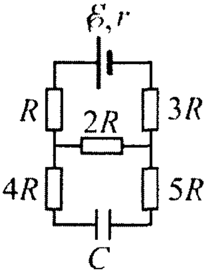
3.2.30. Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата $ABCD$. Батарею подключают сначала к вершинам квадрата A и B, а затем к вершинам A и C. В первом случае сила тока, протекающего через батарею, оказывается в $m = 1{,}2$ раза больше, чем во втором. Определить внутреннее сопротивление батареи r, если известно, что сопротивление проволоки, из которой изготовлен квадрат, $R = 4$ Ом.

Ответ: $r = \dfrac{R}{16} \cdot \dfrac{4 - 3m}{m - 1} = 0{,}5$ Ом.

3.2.31. В цепь включены два источника с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 4$ В, $\mathscr{E}_2 = 5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 4$ Ом соответственно, и три одинаковые резистора сопротивлениями R. При какой величине R значения токов I_1 и I_2 будут равны друг другу?

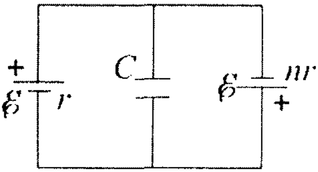


Ответ: $R = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 - \mathscr{E}_2 r_1}{3(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)} = 2$ Ом.



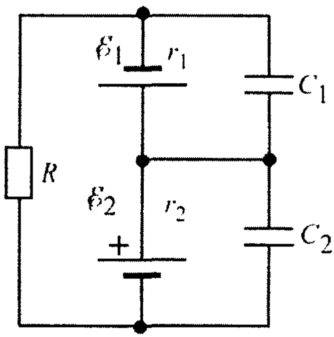
3.2.32.[E] Чему равна энергия конденсатора емкости C, подключенного по электрической схеме, представленной на рисунке? Параметры элементов схемы: $C = 4$ мкФ, $\mathcal{E} = 3$ В, $R = 3$ Ом, $r = 2$ Ом.

Ответ: $W = \dfrac{2C\mathcal{E}^2R^2}{(6R+r)^2} = 1{,}62$ мкДж.



3.2.33. В схеме, показанной на рисунке, использованы две батареи с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$, но различающимися в $n = 3$ раза внутренними сопротивлениями. Определить ЭДС этих элементов, если заряд конденсатора емкостью $C = 8$ мкФ равен $q = 25$ мкКл.

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{(n+1)q}{(n-1)C} = \dfrac{2q}{C} = 6{,}25$ В.



3.2.34. Найти отношение величин зарядов конденсаторов C_1 и C_2 в цепи, схема которой изображена на рисунке. Параметры элементов схемы: $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 40$ мкФ, $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 8$ В, $R = 18$ Ом, $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 4$ Ом.

Ответ:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\mathcal{E}_1(R+r_2)+\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_2(R+r_1)+\mathcal{E}_1 r_2} = 0{,}35.$$

3.2.35. Сопротивление R нелинейного резистора зависит от приложенного к нему напряжения U по закону: $R = \alpha\sqrt{U}$, где $\alpha = 5$ Ом·В$^{-1/2}$. Если три таких резистора соединить последовательно и подключить к батарее, то в цепи будет течь ток

$I_1 = 0{,}2$ А. Если же эти резисторы соединить параллельно и подключить к той же батарее, то через нее будет течь ток $I_2 = 0{,}3$ А. Найти ЭДС батареи.

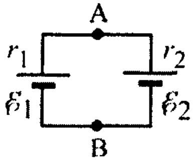
Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{(27I_1 - I_2)\alpha^2 I_1 I_2}{9(I_2 - I_1)} = 8{,}5$ В, решение существует при $1 < \dfrac{I_2}{I_1} < \sqrt{27}$, т.к. внутреннее сопротивление батареи не может быть отрицательным, а при уменьшении сопротивления нагрузки ток через питающую ее батарею должен увеличиваться.

3.2.36.[E] К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной l = 10 м приложили разность потенциалов U = 1 В. Определите промежуток времени, в течение которого температура проводника повысится на ΔT = 10 К. Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. Плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление $\rho_м = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, удельная теплоемкость c = 380 Дж/(кг·К).

Ответ: $t = \dfrac{\Delta T c \rho l^2 \rho_м}{U^2} \approx 57{,}5$ с.

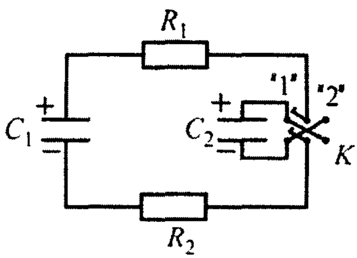
3.2.37. Внутри проточного электронагревателя имеется емкость, в которую непрерывно поступает холодная вода из водопровода. За время прохождения через емкость эта вода подогревается при помощи нагревательного элемента, подключенного к сети электрического тока. Такой электронагреватель, подключенный к сети постоянного тока с напряжением U = 220 В, потребляет ток I = 25 А. Через нагреватель в минуту проходит объем воды $q = 2$ л. При этом вода нагревается от температуры t_1 = 10 °С до температуры t_2 = 40 °С. Плотность воды ρ = 1 г/см^3, удельная теплоемкость c = 4,2 Дж/(г·К). Найти КПД этого нагревателя. Ответ выразить в процентах.

Ответ: $\eta = \dfrac{c \rho q (t_2 - t_1) \cdot 100\%}{IU} \approx 76\%$.



3.2.38. Два источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом соединены в цепь, изображенную на рисунке. Найти разность потенциалов U_{AB} между точками A и B и мощность N, выделяющуюся в этой цепи.

Ответ: $U_{AB} = \dfrac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} \approx 8{,}3$ В, $N = \dfrac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{r_1 + r_2} \approx 8{,}3$ Вт.



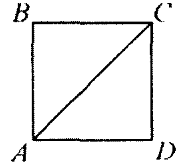
3.2.39. Напряжения между обкладками одинаковых конденсаторов C_1 и C_2 с емкостью $C = 1$ мкФ в схеме, показанной на рисунке, равны $U_1 = 300$ В и $U_2 = 500$ В, соответственно. Сначала двойной ключ K из разомкнутого состояния переводят в положение «1». Сколько теплоты выделится в резисторе R_1 после переключения ключа K в положение «2», если $R_1/R_2 = n = 3$?

Ответ: $\Delta Q_1 = \dfrac{(U_1 + U_2)^2\, n\, C}{4\,(n+1)} = 0{,}12$ Дж .

3.2.40. Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, имеющей сопротивление $R = 10$ Ом. ЭДС генератора $\mathcal{E} = 100$ В, его мощность $N = 400$ Вт. Определить отношение η мощности, выделяемой в полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

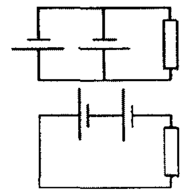
Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{NR}{\mathcal{E}^2} = 0{,}6$.

3.2.41. Из однородной проволоки спаян контур в виде квадрата $ABCD$ с диагональю AC (см. рисунок). Источник напряжения, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, подсоединяют к точкам A и C схемы (случай 1), а затем к точкам B и D (случай 2). Во сколько раз различаются мощности N_1 и N_2, выделяемые в контуре в этих случаях?



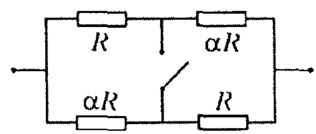
Ответ: $\dfrac{N_2}{N_1} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.

3.2.42. Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных гальванических элементов с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждый нагружена на внешнее сопротивление $R = 1$ Ом. Во сколько раз β изменится отношение мощности, выделяемой во внешнем сопротивлении, к полной мощности, если элементы соединить последовательно?



Ответ: $\beta = \dfrac{\eta_2}{\eta_1} = \dfrac{R + (r/2)}{R + 2r} = 0{,}5$.

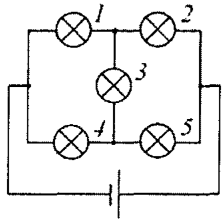
3.2.43. Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в α раз, соединены, как показано на рисунке, и подключены к источнику тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Найти α, если известно, что при замыкании ключа общая мощность, выделяющаяся в цепи, увеличивается в $k = 2$ раза. Изменением сопротивлений элементов при нагревании пренебречь.



Ответ: $\alpha = 2k - 1 \pm 2\sqrt{k^2 - k} = 3 \pm 2\sqrt{2}$;

$\alpha_1 \approx 5{,}83$, $\alpha_2 \approx 0{,}17$.

3.2.44. Пять одинаковых лампочек соединены в цепь, как показано на рисунке, и подключены к батарее. Во сколько раз α изменится мощность, выделяющаяся в этой цепи, если лампочка номер *1* перегорит? Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало.



Ответ: $\alpha = \dfrac{N_2}{N_1} = 0{,}6$.

3.2.45. К аккумулятору параллельно подключены два одинаковых резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. При этом на них выделяется суммарная мощность $N = 110$ Вт. Если один из резисторов отсоединить, то потребляемая от аккумулятора мощность останется неизменной и равной N. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ аккумулятора.

Ответ: $\mathcal{E} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{NR} \approx 80$ В.

3.2.46. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом нагревательный элемент развивает мощность $N_1 = 10$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным параллельно, выделяемая в нагревателе мощность составила $N_2 = 12{,}1$ Вт. Найти сопротивление R нагревателя.

Ответ: $R = r\dfrac{2 - \sqrt{N_2/N_1}}{2\left(\sqrt{N_2/N_1} - 1\right)} = 0{,}9$ Ом.

3.2.47. Электрический нагреватель для воды имеет две спирали. При подключении к сети одной из спиралей вода в нагревателе закипает через время $t_1 = 10$ мин, а при подключении другой – через время $t_2 = 15$ мин. Через какое время вода в нагревателе закипит, если обе эти спирали подключить к сети, соединив их а) параллельно, б) последовательно? Количество воды и ее начальная температура во всех случаях одинаковы. Потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $t_{\text{пар}} = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6$ мин, $t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 25$ мин.

3.2.48. Два нагревателя при параллельном подключении к сети развивают суммарную мощность $N_1 = 600$ Вт, а при последовательном – $N_2 = 126$ Вт. Каковы номинальные мощности N_{01} и N_{02} этих нагревателей?

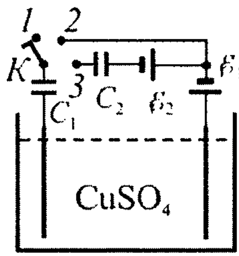
Ответ: $N_{01} = \dfrac{N_1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2} = 420$ Вт,

$$N_{02} = \frac{N_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2} = 180 \text{ Вт.}$$

3.2.49. Две проволоки, изготовленные из материала с малым температурным коэффициентом сопротивления, подключают к аккумулятору с очень малым внутренним сопротивлением сначала параллельно, а потом – последовательно. При параллельном включении скорость дрейфа свободных носителей заряда в проволоках оказалась одинаковой, а при последовательном она в первой проволоке уменьшилась в $k = 5$ раз по сравнению с параллельным включением. Найти отношение диаметров проволок.

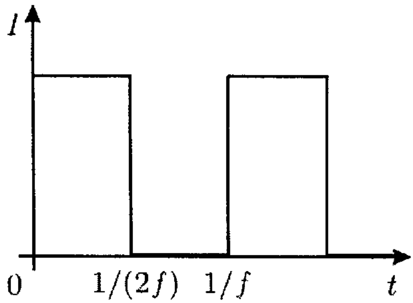
Ответ: $x = \sqrt{k-1} = 2$.

3.2.50. Цепь состоит из двух незаряженных конденсаторов емкостью $C_1 = 50$ мкФ и $C_2 = 20$ мкФ, двух батарей с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В и $\mathcal{E}_2 = 14$ В, ключа K, находящегося в положении *1*, и электролитической ванны, наполненной раствором электролита. За достаточно большое время после перевода ключа в положение *2* на одном из электродов выделилось вещество массой m. Затем ключ перевели в положение *3*, и к моменту прекращения тока в цепи на том же электроде дополнительно выделилась масса вещества Δm. Найти отношение $\Delta m / m$.



Ответ: $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{C_2 \mathcal{E}_2}{(C_1 + C_2)\mathcal{E}_1} = 0{,}8$.

3.2.51. В стеклянную кювету, две противоположные стенки которой покрыты слоем меди, налит водный раствор медного купороса ($CuSO_4$) с удельным сопротивлением $\rho = 0{,}3$ Ом·м. Высота слоя электролита равна $h = 10$ см. Ширина проводящих стенок кюветы равна $b = 50$ см, расстояние между ними $L = 10$ см. Кювету подключают к источнику тока частотой $f = 10$ Гц. Закон изменения тока показан на рисунке. Найдите изменение температуры



ΔT электролита за время $t = 100$ с после подключения, если масса катода кюветы за это время увеличилась на $m = 1$ г. Теплоёмкость электролита равна $C = 3600$ Дж/(кг·°С), молярная масса меди $M = 64$ г/моль, ее валентность $Z = 2$. Считайте, что всё джоулево тепло идёт на нагревание электролита, поляризацией электродов пренебречь.

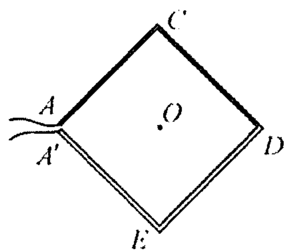
Ответ: $\Delta T = \dfrac{2\rho L}{bhCt}\left(\dfrac{mZeN_A}{M}\right)^2 \approx 30$ К.

3.2.52.[E] Вакуумный диод, у которого анод (положительный электрод) и катод (отрицательный электрод) – параллельные пластины, работает в режиме, когда между током и напряжением выполняется соотношение $I = aU^{3/2}$ (где a – некоторая постоянная величина). Во сколько раз увеличится сила, действующая на анод вследствие удара электронов, если напряжение на диоде увеличить в $n = 2$ раза? Начальную скорость вылетающих электронов считать равной нулю.

Ответ: $\dfrac{F}{F_0} = n^2 = 4.$

3.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

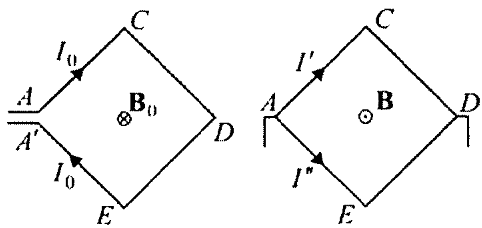
Примеры решения задач и методические рекомендации



3.3.1. Из двух кусков медной проволоки одинаковой длины и разного поперечного сечения изготовлен квадрат $ACDEA'$, разомкнутый в одной из вершин (концы проволок обозначены точками A и A' на рисунке). Площадь сечения проволоки на участке ACD вдвое меньше, чем на участке DEA'. Когда к точкам A и A' подключили источник постоянного тока, оказалось, что магнитная индукция в центре квадрата равна $B_0 = 1$ мТл. Какова будет магнитная индукция B в центре квадрата, если соединить между собой точки A и A' и тот же источник подключить к вершинам A и D? Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Расстояние между точками A и A' считать малым.

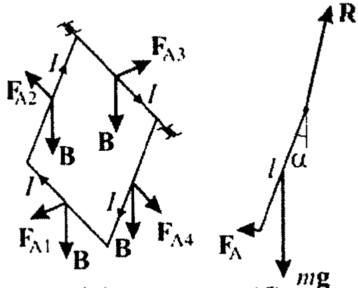
Решение. Пусть ρ – удельное сопротивление меди, S – площадь сечения тонкой проволоки, l – сторона квадрата. Сопротивление контура при его подключении к точкам A и A' равно $R_0 = \rho\dfrac{2l}{S} + \rho\dfrac{2l}{2S} = \rho\dfrac{3l}{S}$. Магнитная индукция B_0 в центре квадрата создается током $I_0 = \dfrac{U}{R_0}$, текущим по четырем одинаковым отрезкам. Используя правило буравчика, находим, что вектор $\mathbf{B}_0$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Обозначив через B_1 модуль магнитной индукции, создаваемой в точке O током I_0, текущим в одном отрезке, по принципу суперпозиции магнитных полей имеем: $B_0 = 4B_1$. При подключении источника к точкам

A и D образуется цепь из параллельно соединенных ветвей с сопротивлениями $R' = \rho\dfrac{2l}{S} = \dfrac{2}{3}R_0$ и $R'' = \rho\dfrac{2l}{2S} = \dfrac{1}{3}R_0$. По верхнему участку цепи течет ток $I' = \dfrac{U}{R'} = \dfrac{3}{2}I_0$. Магнитная индукция, создаваемая этим током в центре квадрата, по модулю равна $B' = 2\cdot\dfrac{3}{2}B_1 = 3B_1$ и направлена от нас. Ток в нижней ветви $I'' = \dfrac{U}{R''} = 3I_0$ создаст в центре квадрата индукцию, модуль которой $B'' = 2\cdot 3B_1 = 6B_1$, а направление противоположно B'. Таким образом, магнитная индукция в центре квадрата по модулю равна $B = |B' - B''| = 3B_1 = \dfrac{3}{4}B_0 = 0{,}75$ мТл и направлена на нас.



При решении этой задачи следует обратить внимание на два важных момента. Во-первых, надо понимать, что в первом случае контур представляет собой четыре последовательно соединенных участка, а во втором – два параллельно соединенных. Поэтому не следует забывать о том, что ток, протекающий по проволоке, определятся сопротивлением контура. Во-вторых, необходимо правильно определить направление вектора магнитной индукции в центре квадрата, так как это существенным образом отразится на правильности ответа.

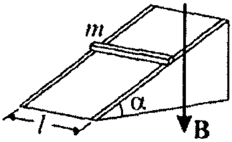
3.3.2. Квадратная проволочная рамка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией, направленной вертикально. Когда по рамке течет ток $I = 5$ А, она отклоняется от вертикальной плоскости на угол $\alpha = 30°$. Определить индукцию магнитного поля B, если площадь сечения проволоки, из которой изготовлена рамка, $S = 4$ мм^2, а плотность материала проволоки $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.



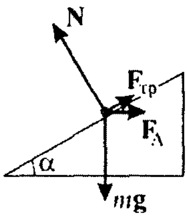
(а) (б)

Решение. Будем проводить решение задачи в неподвижной относительно земли системе отсчета, считая ее инерциальной. Модули и направления сил, действующих на отдельные стороны рамки со стороны магнитного поля (сил Ампера F_{A1}, F_{A2}, F_{A3}, F_{A4}), изображены на рисунке (*а*). Видно, что отклонение рамки от вертикали вызывает сила F_{A1}, приложенная к нижней горизонтальной стороне рамки. Сила F_{A3} приложена к оси, на которой вращается рамка, а силы F_{A2} и F_{A4} действуют в плоскости рамки и могут вызвать только ее деформацию. Таким образом, рамка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке (*б*), где mg – модуль силы тяжести, $F_A \equiv F_{A1} = IBl$ – модуль силы Ампера, R – модуль силы реакции оси. Здесь $m = 4lS\rho$ – масса рамки, l – длина одной из ее сторон, Уравнение моментов относительно оси вращения рамки имеет вид: $F_A l \cos\alpha = mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $B = \dfrac{2\rho S g}{I}\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}079$ Тл.

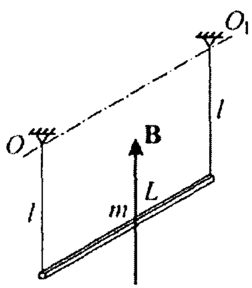
При решении этой задачи важно правильно определить модули и направления сил, действующих на рамку. Имеет смысл обратить внимание на точку приложения силы тяжести, а также на величину угла между векторами $\vec{F}_{A1}$ и $\vec{B}$.



3.3.3. Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол $\alpha = 30°$, проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой $m = 1$ кг. Какой минимальной величины ток $I_{\min}$ нужно пропустить по стержню, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл, направленной вертикально? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$, расстояние между ними $l = 0{,}5$ м.



Решение. Для решения задачи выберем систему отсчета, неподвижную относительно земли. Полагая эту систему инерциальной, рассмотрим силы, действующие на стержень. На рисунке показан вид на рельсы и стержень сбоку. Здесь mg – модуль силы тяжести, N – модуль суммы нормальных составляющих силы реакции рельсов, F_A – модуль силы Ампера, $F_{тр}$ – модуль суммарной силы трения, действующей на стержень со стороны рельсов. Заметим, что минимальное значение силы тока, при котором стержень находится в равновесии, соответствует случаю, когда сила трения покоя направлена вдоль наклонной плоскости вверх, и ее величина достигла максимального значения, т.е. $F_{тр} = \mu N$. В проекциях на направление наклонной плоскости и на перпендикулярное ей направление условия равновесия имеют вид: $mg\sin\alpha = F_A\cos\alpha + \mu N$, $mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha = N$. Учитывая, что $F_A = IBl$, получаем ответ: $I_{\min} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bl(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} \approx 33{,}8$ А.

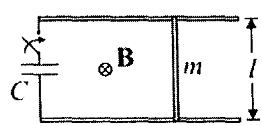


При решении этой задачи важно понимать, что сила $mg\sin\alpha$ уравновешивается не только проекцией силы Ампера на направление наклонной плоскости $F_A\cos\alpha$, но и силой трения покоя $F_{тр} = \mu N$. Если не учесть это обстоятельство, то решение будет неправильным.

3.3.4. Металлический стержень массой $m = 7{,}5$ г и длиной $L = 30$ см подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной $l = 15$ см каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция B = 57 мТл которого направлена вертикально. По стержню пропускают кратковременный импульс постоянного тока силой I_0 и длительностью $\tau = 1$ с. При каком минимальном значении I_0 стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси, проходящей через точки подвеса? Считать, что смещение стержня за время τ ничтожно мало.

Решение. Импульс силы Ампера за время τ равен $I_0 BL\tau$. По второму закону Ньютона $mv_0 = I_0 BL\tau$, откуда скорость, которую приобретает стержень по окончании импульса тока, $v_0 = \dfrac{I_0 BL\tau}{m}$. Уравнение движения стержня по окружности в верхней точке траектории имеет вид: $\dfrac{mv^2}{l} = mg + T$, где T – суммарное натяжение нитей. Скорость стержня v в верхней точке минимальна, если $T = 0$. Следовательно $v^2 = gl$. Из закона сохранения энергии вытекает равенство: $\dfrac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{5}{2}mgl$. Отсюда $v_0 = \sqrt{5gl}$. Объединяя записанные выражения, находим ответ: $I_0 = \dfrac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau} \approx 1{,}2$ А.

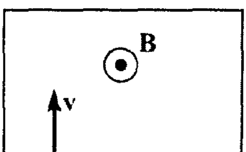
Важно отметить, что минимальная скорость стержня в верхней точке не равна нулю. В противном случае стержень не будет двигаться по окружности и упадет вниз, не достигнув верхней точки.



3.3.5. Металлический стержень массой $m = 5$ г лежит на двух проводящих рейках, расположенных в горизонтальной плоскости, как показано на рисунке. Рейки через ключ подсоединены к пластинам конденсатора, а вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, направленной вертикально. В начальный момент заряд на конденсаторе равен $q_0 = 2$ мКл, ключ разомкнут, а стержень покоится. Затем ключ замыкают. Определить заряд q на конденсаторе в момент, когда скорость стержня достигнет величины $v = 1$ см/с. Расстояние между рейками $l = 10$ см. Индуктивностью цепи, а также силами трения пренебречь.

Решение. При замыкании ключа по контуру потечет ток I, и на стержень начнет действовать сила Ампера $F_{\text{А}} = IBl$, в результате чего стержень придет в движение. Поскольку $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$, импульс силы Ампера за малое время Δt равен $F_{\text{А}}\Delta t = Bl\Delta q$. По второму закону Ньютона $m\Delta v = F_{\text{А}}\Delta t$. Следовательно, $m\Delta v = Bl\Delta q$. Такое же равенство справедливо и для конечных приращений скорости и заряда. Полагая $\Delta v = v$, $\Delta q = q_0 - q$, находим, что $mv = Bl(q_0 - q)$. Выражая из последнего равенства заряд q, получаем ответ: $q = q_0 - \dfrac{mv}{Bl} = 1$ мКл.

При решении этой задачи важно установить, что приращение скорости стержня пропорционально приращению заряда на конденсаторе.



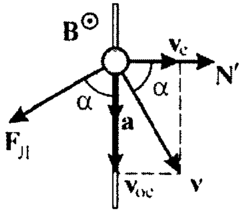
3.3.6.[E] Пучок ионов попадает в камеру масс-спектрометра через отверстие в точке A со скоростью $v = 3\cdot10^4$ м/с, направленной перпендикулярно стенке AC. В камере создается однородное магнитное поле, линии вектора индукции которого перпендикулярны вектору скорости ионов. Двигаясь в этом поле, ионы попадают на мишень, расположенную в точке C на расстоянии $L = 18$ см от точки A (см. рисунок). Чему равна индукция магнитного поля B, если отношение массы иона к его заряду $m/q = 6\cdot10^{-7}$ кг/Кл?

Решение. На ион со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, равная по величине $F = qvB$. Так как эта сила всегда направлена перпендикулярно вектору скорости иона, то ион будет двигаться внутри камеры масс-спектрометра по половине дуги окружности до тех пор, пока не попадет в точку C. Радиус данной окружности равен $R = L/2$. При этом сила F будет сообщать иону центростремительное ускорение $a = v^2/R$. Запишем второй закон Ньютона для движения иона по окружности с постоянной скоростью: $ma = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{L/2} = qvB$. Отсюда

$$B = \frac{2v}{L} \cdot \frac{m}{q} = 0{,}2 \text{ Тл.}$$

Заметим, что в реальных масс-спектрометрах индукция магнитного поля обычно может быть задана, и описанную выше идею используют для экспериментального определения удельного заряда частиц. При этом если известен заряд частицы (например, все ионы в пучке являются однозарядными, то есть имеют заряд, равный по модулю заряду электрона), то появляется возможность измерения массы частицы. Изменяя величину индукции магнитного поля, можно добиться того, чтобы в точку C попадали только ионы определенной массы, то есть провести разделение ионов по массам. Именно поэтому описанный в условии задачи прибор называется масс-спектрометром.

3.3.7. Заряженная бусинка массой $m = 1$ г надета на гладкий горизонтальный стержень, который движется с горизонтальной скоростью $v_с = 1$ м/с, направленной перпендикулярно стержню. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально. В некоторый момент времени скорость бусинки относительно стержня составляет $v_{ос} = 2$ м/с, а ее ускорение равно $a = 3$ м/с^2. С какой силой N действует бусинка на стержень в этот момент времени? Силу тяжести не учитывать, трением бусинки о стержень пренебречь.

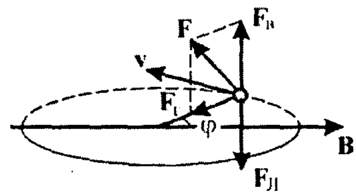


Решение. Вид сверху на стержень и бусинку изображен на рисунке. Согласно закону сложения скоростей, скорость бусинки $\mathbf{v}$ в неподвижной системе отсчета равна $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{oc}$. На бусинку действуют сила Лоренца $\mathbf{F}_Л$ и сила реакции стержня $\mathbf{N}'$. Сила Лоренца направлена горизонтально и перпендикулярно вектору $\mathbf{v}$; величина этой силы $F_Л = qvB$. Сила реакции перпендикулярна стержню, так как трением между бусинкой и стержнем по условию можно пренебречь. Проекции уравнения движения бусинки на касательное и нормальное к стержню направления имеют вид: $ma = F_Л \cos\alpha$, $F_Л \sin\alpha - N' = 0$. Тогда $N' = ma\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v_{oc}}{v_c}$. По третьему закону Ньютона сила, с которой бусинка действует на стержень (на рисунке не показана), равна по величине силе реакции стержня: $N = N'$. Отсюда

$$N = ma\frac{v_{oc}}{v_c} = 6\cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

При решении подобных задач вызывает трудности векторное сложение скоростей. Кроме того, весьма важно отметить, что сила Лоренца перпендикулярна именно вектору скорости $\mathbf{v}$. Другой проблемой может стать правильная запись законов движения: надо понимать, что бусинка движется с ускорением *вдоль* стержня.

3.3.8. Горизонтально расположенный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. На другом конце стержня закреплен маленький шарик массой $m = 1$ г, несущий заряд $q = 0{,}4$ мКл. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого $B = 2$ Тл направлена горизонтально. Найти максимальное значение F_{max} силы F, с которой стержень действует на шарик в процессе движения, если известно, что минимальное значение силы F равно $F_{min} = 250$ мН. Силу тяжести не учитывать, размером шарика по сравнению с длиной стержня пренебречь.



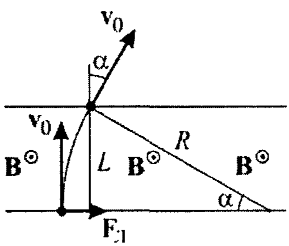
Решение. Силы, действующие на шарик в некоторой точке его траектории, изображены на рисунке. Здесь через **F** обозначена сила реакции стержня, а через $\mathbf{F}_Л$ – сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости стержня и вектору магнитной индукции, т.е. вертикально. Силу **F** удобно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_г + \mathbf{F}_в$. Тогда $F = \sqrt{F_г^2 + F_в^2}$. Проекции уравнения движения шарика на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид: $m\omega^2 l = F_г$, $F_в = F_Л = qvB\cos\varphi$, где $v = \omega l$ – скорость шарика, l – длина стержня, φ – угол между стержнем и вектором **B**. Отсюда $F = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega lB\cos\varphi)^2}$. Минимальное значение этой силы достигается при $\varphi = 90°$, $\varphi = 270°$, максимальное – при $\varphi = 0$, $\varphi = 180°$. Следовательно, $F_{\min} = m\omega^2 l$, $F_{\max} = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega lB)^2}$. Из этих равенств находим ответ:

$$F_{\max} = F_{\min}\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{m\omega}\right)^2} \approx 320 \text{ мН}.$$

При решении этой задачи особые трудности вызывает определение направления силы реакции стержня. Было бы полезным нарисовать силы, действующие на шарик при максимальных и минимальных значениях силы, с которой стержень действует на шарик (при $\varphi = 0$, $\varphi = 90°$, $\varphi = 180°$ и $\varphi = 270°$).

3.3.9. Заряженная частица массой $m = 6{,}4 \cdot 10^{27}$ кг влетает со скоростью $v_0 = 100$ км/с в область с постоянным и однородным магнитным полем, вектор индукции которого $\mathbf{B}$ перпендикулярен $\mathbf{v}_0$. На какой угол α отклонится вектор скорости частицы, если область, занимаемая магнитным полем, в котором движется частица, ограничена плоскостями, перпендикулярными $\mathbf{v}_0$, расстояние между которыми $L = 10$ см? Заряд частицы $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Силу тяжести не учитывать.

Решение. Когда частица окажется в области, занимаемой магнитным полем, на нее будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости частицы. Под действием этой силы частица будет двигаться по дуге окружности, подчиняясь уравнению движения: $m\dfrac{v_0^2}{R} = qv_0B$. Отсюда радиус дуги



$R = \dfrac{mv_0}{qB}$. Из рисунка видно, что угол α, на который отклонится скорость частицы, определяется соотношением между радиусом дуги R и длиной области L, занимаемой магнитным полем. В частности, при $R > L$ $\sin\alpha = \dfrac{L}{R} = \dfrac{LqB}{mv_0}$. Если $R \le L$, то частица опишет в области, занимаемой полем, полуокружность, и угол $\alpha = 180°$. Таким образом, ответ к задаче формулируется следующим образом: $\alpha = 180°$ при $v_0 \le \dfrac{q}{m}BL$; $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{q}{m} \cdot \dfrac{BL}{v_0}\right)$ при $v_0 > \dfrac{q}{m}BL$. При числовых данных из условия задачи $\alpha = 30°$.

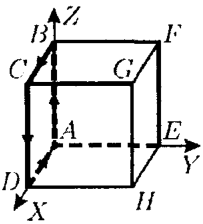
Следует отметить, что, получив выражение для величины $\sin\alpha$, имеет смысл проанализировать, удовлетворяют ли величины, входящие в это выражение, условию $\sin\alpha \le 1$. Кроме того, важно понимать, что сравнение скорости частицы v_0 с величиной $\frac{q}{m}BL$, подразумевает варьирование величины скорости при прочих постоянных параметрах. Понятно, что можно изменять другую величину, тогда и неравенство будет другим, например, $L < \frac{mv_0}{qB}$, но решение останется верным.

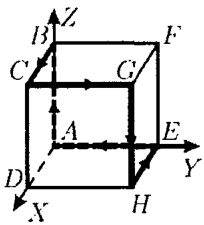
3.3.10. Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл по окружности радиусом $R = 4$ м. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность $E = 10$ В/м которого направлена параллельно магнитной индукции. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывать.

Решение. Уравнение движения частицы по окружности в однородном магнитном поле имеет вид: $\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B$, где m – масса, q – заряд, v_0 – скорость частицы. Отсюда $v_0 = \frac{qBR}{m}$. Таким образом, кинетическая энергия частицы до включения электрического поля $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m}$. После включения электрического поля частица за время Δt приобретет в направлении поля скорость $v_1 = \frac{qE}{m}\Delta t$ (где $qE\Delta t$ – импульс силы, с которой действует электрическое поле на заряд за время Δt), и кинетическая энергия частицы станет равной $E_1 = \frac{m(v_0^2 + v_1^2)}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} + \frac{(qE\Delta t)^2}{2m}$. По условию $E_1 = nE_0$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $\Delta t = \sqrt{n-1} \cdot \frac{BR}{E} = 0{,}16$ с.

При решении этой задачи будет весьма полезным изобразить силы, действующие на частицу, сначала находящуюся в магнитном поле и совершающую движение по окружности. Если задать направление движения частицы (по или против часовой стрелки), то тогда данных условия задачи будет достаточно, чтобы определить направление вектора индукции B. После этого имеет смысл изобразить силы, действующие на частицу, движущуюся в магнитном и электрическом полях, и равнодействующую этих сил. Стоит также обратить внимание на определение проекции скорости частицы на направление электрического поля, чтобы в дальнейшем исключить ошибку при записи кинетической энергии частицы.

Задачи для самостоятельного решения





3.3.11. Ток I, текущий по контуру $ABCDA$, образованному четырьмя рёбрами куба (рис. сверху), создаёт в центре куба магнитное поле с индукцией $B_0 = 0{,}04$ Тл. Найдите модуль и направление вектора индукции магнитного поля **B**, создаваемого в центре куба током I, текущим по контуру из шести рёбер $ABCGHEA$ (рис. снизу).

Ответ: $B = \sqrt{3}B_0 \approx 0{,}07$ Тл, вектор **B** направлен вдоль отрезка DF в сторону точки F.

3.3.12. Подвешенный горизонтально на двух невесомых нитях прямолинейный проводник находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально. Если по проводнику течет ток $I_1 = 1$ А, то нити отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30°$. При какой силе тока I_2 в проводнике нити отклонятся на угол $\alpha_2 = 60°$?

Ответ: $I_2 = I_1 \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 3$ А.

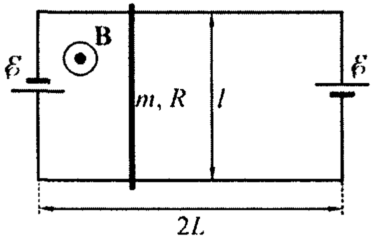
3.3.13. Два гвоздя вбиты в вертикальную стену на расстоянии $L = 10$ см друг от друга на одном горизонтальном уровне. Тонкая гибкая проволока прикреплена одним концом к первому гвоздю и переброшена через второй гвоздь. К свободному концу проволоки прикреплен груз массой $m = 1$ г. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл, направленной горизонтально перпендикулярно проволоке. Найти силу электрического тока, который должен протекать по участку проволоки, расположенному между гвоздями, чтобы этот участок имел в равновесии форму полуокружности. Массой проволоки и ее трением о второй гвоздь пренебречь.

Ответ: $I = \dfrac{2mg}{BL} = 1$ А.

3.3.14. Тонкий проводящий стержень длиной $L = 40$ см и массой $m = 50$ г подвесили в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл горизонтально за концы на одинаковых легких пружинах жесткостью $k = 0,16$ кН/м каждая. Линии индукции направлены горизонтально и перпендикулярно оси стержня. Затем через стержень пропустили прямоугольный импульс тока с амплитудой $I = 2$ А столь малой длительности $\tau = 0,1$ с, что за время его действия стержень не успел заметно сместиться от положения равновесия. Найти амплитуду возникших колебаний стержня, пренебрегая влиянием воздуха.

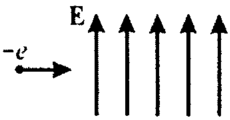
Ответ: $A = \dfrac{ILB\tau}{\sqrt{2mk}} = 0,04$ м.

3.3.15. Параллельные рельсы длиной $2L = 80$ см закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В (см. рисунок). На рельсах лежит перемычка массой $m = 50$ г, которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл. Считая, что сопротивление перемычки равно $R = 2$ Ом, а сопротивление единицы длины каждого из



рельсов равно $\rho = 26$ нОм/м, найдите период T малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E} l B}} \approx 28{,}1$ с.



3.3.16. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $\mathbf{E}$ перпендикулярно силовым линиям ($E = 6 \cdot 10^4$ В/м). Определить величину вектора индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $E_к = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $B = E\sqrt{\dfrac{m}{2E_к}} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ Тл.

3.3.17.^{E} С какой скоростью вылетает α-частица из радиоактивного ядра, если она, попадая в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл перпендикулярно его силовым линиям, движется по дуге окружности радиусом $r = 0{,}5$ м (α-частица – ядро атома гелия, молярная масса гелия $M = 0{,}004$ кг/моль).

Ответ: $V = \dfrac{2BerN_A}{M} \approx 2{,}4 \cdot 10^7$ м/с.

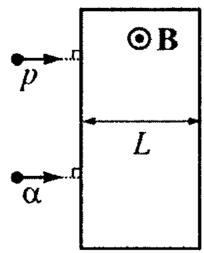
3.3.18.[E] Электрон влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}01$ Тл со скоростью $v = 1000$ км/с перпендикулярно линиям магнитной индукции. Какой путь он пройдет к тому моменту, когда вектор его скорости повернется на 1°?

Ответ: $s = \dfrac{\pi m v}{180 B e} \approx 10^{-5}$ м.

3.3.19.[E] В кинескопе телевизора разность потенциалов между катодом и анодом $U = 16$ кВ. Отклонение электронного луча при горизонтальной развертке осуществляется магнитным полем, создаваемым двумя катушками. Ширина области, в которой электроны пролетают через магнитное поле, равна $d = 10$ см. Какова индукция B отклоняющего магнитного поля при значении угла отклонения электронного луча $\alpha = 30°$?

Ответ: $B = \dfrac{\sin\alpha}{d}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ Тл.

3.3.20. Протон и α-частица, ускоренные из состояния покоя некоторой разностью потенциалов, влетают в область пространства с параллельными границами, в которой есть однородное постоянное магнитное поле. Их скорости в момент попадания в область магнитного поля перпендикулярны границам этой области, как показано на рисунке. При вылете из магнитного поля скорость протона изменила свое направление относительно начального на угол $\varphi_p = 45°$. На какой угол φ_α относительно начального направления повернется после вылета из области поля вектор скорости α-частицы? Взаимодействием протона с α-частицей, действием сил тяжести и потерями энергии частиц при их движении пренебречь.



Ответ: $\varphi_\alpha = \arcsin\left(\sin\varphi_p\sqrt{\dfrac{m_p q_\alpha}{m_\alpha q_p}}\right) = 30°$.

3.3.21. В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл находится прямая бесконечная равномерно заряженная нить, расположенная параллельно линиям поля. В плоскости, перпендикулярной нити, по окружности, центр которой лежит на нити, движется пылинка массой $m = 4$ мг, имеющая заряд $q = 0{,}5$ нКл. Если бы направление магнитного поля было противоположным, то пылинка двигалась бы по той же окружности и в том же направлении, но период ее обращения изменился бы на величину $\Delta T = 5$ с. Каким был бы период обращения пылинки по той же окружности в отсутствие магнитного поля? Считать, что во всех случаях действием сил тяжести и сил сопротивления на пылинку можно пренебречь.

Ответ: $T_0 = \sqrt{\dfrac{2\pi m}{qB}\Delta T} \approx 500$ с.

3.3.22. Положительно заряженному тяжелому маленькому шарику, подвешенному на тонкой шелковой нити к потолку, сообщили такую скорость, что он стал двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. Если шарику этого маятника сообщить ту же скорость в пространстве, где есть однородное магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}2$ Тл направлена вертикально вверх, и постоянное электрическое поле, напряженность которого $E = 4$ В/м направлена вертикально вниз, то период и направление его обращения не изменятся. Пренебрегая потерями энергии, найти угловую скорость ω движения шарика.

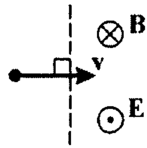
Ответ: $\omega = \dfrac{gB}{E} = 0{,}5$ рад/с.

3.3.23. Заряженная частица двигалась в некоторой области пространства, где имеются взаимно перпендикулярные однородные поля: электрическое – с напряжённостью $E = 5$ В/м, магнитное – с индукцией $B = 0{,}2$ Тл и поле силы тяжести g. Вектор скорости частицы при этом был постоянным и перпендикулярным магнитному полю. После того, как частица покинула эту область пространства и начала движение в другой области, где имеется только поле силы тяжести g, её скорость начала уменьшаться.

Через какое время τ после вылета частицы из первой области её скорость достигнет минимального значения?

Ответ: $\tau = \dfrac{E}{gB} = 2{,}5$ с.

3.3.24. Заряженная частица влетает со скоростью $v = 100$ м/с в полупространство, где существуют однородное электрическое поле с напряженностью $E = 11$ В/м и однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл так, как показано на рисунке. На какой угол отклонится частица от первоначального направления полета в момент ее вылета из этой области? Потерями энергии частицы и действием на нее силы тяжести пренебречь.



Ответ: $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{\pi E}{vB} = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{vB}{\pi E} \approx 2{,}1$ рад $\approx 120°$.

3.3.25. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B. В точке A он имеет скорость $v = 16800$ км/с, вектор которой составляет с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 60°$. При какой величине магнитной индукции B электрон попадет при своем движении в точку C, находящуюся на одной линии индукции с точкой A? Расстояние $AC = L = 5$ см, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $B = 2\pi k \dfrac{mv\cos\alpha}{eL} \approx 6 \cdot 10^{-3} \cdot k$ Тл, $k = 1, 2, \cdots$.

3.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Примеры решения задач и методические рекомендации

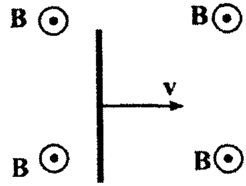
3.4.1.[E] Плоская горизонтальная фигура площадью $S = 0{,}1$ м^2, ограниченная проводящим контуром с сопротивлением $R = 5$ Ом, находится в однородном магнитном поле. Пока проекция вектора магнитной индукции на вертикальную ось OZ медленно и равномерно возрастает от $B_{1z} = -0{,}15$ Тл до некоторого конечного значения B_{2z}, по контуру протекает заряд $q = 0{,}008$ Кл. Найдите B_{2z}.

Решение. В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, модуль ЭДС индукции связан с модулем изменения пронизывающего контур магнитного потока соотношением $|\mathcal{E}| = \dfrac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$, где Δt – промежуток времени, за который произошло изменение $\Delta\Phi$. По закону Ома ток, возникший в контуре, $I = \dfrac{|\mathcal{E}|}{R}$, а заряд, протекший за время Δt по проводящему контуру, $q = I\,\Delta t = \dfrac{|\Delta\Phi|}{R}$. По определению, магнитный поток через площадь рассматриваемой горизонтальной фигуры равен $\Phi = B_z S$. Следовательно, $q = \dfrac{|B_{2z} - B_{1z}|\,S}{R}$, откуда $|B_{2z} - B_{1z}| = \dfrac{qR}{S} = 0{,}4$ Тл.

Далее необходимо рассмотреть два случая. Если $B_{2z} > B_{1z}$, то выражение под знаком модуля положительно, и его можно просто убрать. Тогда $B_{2z} = B_{1z} + \dfrac{qR}{S} = 0{,}25$ Тл. Если же $B_{2z} < B_{1z}$, то выражение под знаком модуля отрицательно, и при его снятии перед стоящим под знаком модуля выражением нужно поставить знак «минус»: $-(B_{2z} - B_{1z}) = \dfrac{qR}{S}$. Отсюда $B_{2z} = B_{1z} - \dfrac{qR}{S} = -0{,}55$ Тл.

Особенностью этой задачи является то, что при ее решении необходимо рассматривать два различных случая. Это связано с тем, что в условии задачи задан модуль протекшего по контуру заряда и не указано, в каком направлении по контуру тёк электрический ток. Поэтому проекция вектора магнитной индукции на ось OZ могла как возрастать, так и уменьшаться.

3.4.2.[E] Горизонтально расположенный проводник длиной $L = 1$ м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}5$ Тл и направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). При начальной скорости проводника, равной нулю, проводник переместился на $s = 1$ м. ЭДС индукции на концах проводника в конце перемещения равна $\mathcal{E} = 2$ В. Каково ускорение проводника?



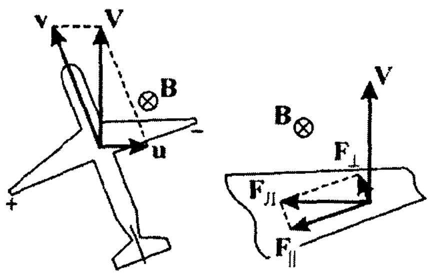
Решение. Пусть в конце перемещения проводник движется относительно неподвижной системы отсчета со скоростью v. Тогда ЭДС индукции на его концах равна $\mathcal{E} = BLv$. При равноускоренном движении, начавшемся с нулевой начальной скоростью, конечная скорость проводника связана с его перемещением следующим образом: $v = \sqrt{2as}$, где a – искомое ускорение проводника. Объединяя записанные формулы, получаем:

$$a = \frac{1}{2s}\left(\frac{\mathcal{E}}{BL}\right)^2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

При решении подобных задач полезно понимать природу возникновения ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле. Возникновение ЭДС индукции связано с действием силы Лоренца на имеющиеся в проводнике свободные носители заряда. Эта сила направлена перпендикулярно вектору скорости проводника, то есть вдоль стержня, и равна по модулю qvB, где q – модуль заряда. Под действием этой силы носители заряда начинают двигаться вдоль стержня. В результате на одном из его концов появляется избыток зарядов, а на другом – недостаток, и в стержне возникает электрическое поле E, направленное от одного конца стержня к другому. Разделение зарядов прекратится тогда, когда сила Лоренца сравняется по модулю с силой, действующей на заряды со стороны электрического поля: $qvB = qE$. При этом внутри стержня будет существовать электрическое поле с напряженностью $E = vB$, а разность потенциалов между его концами составит $U = EL = BLv$. Эта разность потенциалов в данном случае и есть ЭДС индукции.

3.4.3. Самолет летит горизонтально, держа курс строго на север при сильном западном ветре, имеющем скорость $u = 40$ м/с. Скорость самолета относительно воздуха $v = 720$ км/ч. Чему равна разность потенциалов ΔU между концами крыльев самолета, если размах крыльев составляет $L = 50$ м, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл? Ширина концов крыльев пренебрежимо мала.

Решение. По закону сложения скоростей скорость самолета в неподвижной относительно земли системе отсчета равна $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (см. рисунок (*а*)). Модуль этой скорости $V = \sqrt{v^2 - u^2}$.

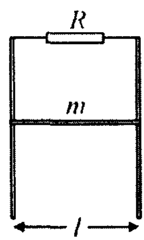


(*а*) (*б*)

На свободные заряды, движущиеся вместе с самолетом со скоростью V, действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости и магнитной индукции (см. рисунок (*б*)), и равная по величине $F_Л = qVB$. Составляющая этой силы $\mathbf{F}_{\parallel}$, параллельная крылу, перемещает положительные заряды на один конец крыла, а отрицательные – на другой конец. Из рисунков (*а*) и (*б*) видно, что $\dfrac{F_{\parallel}}{F_{\text{Л}}} = \dfrac{V}{v}$. Следовательно, $F_{\parallel} = F_{\text{Л}} \dfrac{V}{v} = \dfrac{qV^2B}{v}$. Движение зарядов прекращается, когда $F_{\parallel}$ уравновешивается силой $F_{\text{эл.ст.}}$, действующей со стороны электростатического поля, возникшего в крыле: $qE_{\text{эл.ст.}} = \dfrac{qV^2B}{v}$. Тогда напряженность электростатического поля внутри крыла $E_{\text{эл.ст.}} = \dfrac{V^2B}{v}$. Разность потенциалов между концами крыла $\Delta U = E_{\text{эл.ст.}}L$. Отсюда

$$\Delta U = BL\left(v - \frac{u^2}{v}\right) = 0{,}48 \text{ В}.$$

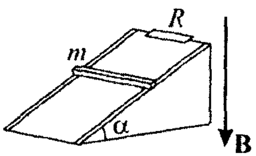
При решении этой задачи следует обратить внимание на три важных момента. Во-первых, необходимо правильно определить направление вектора скорости самолета в неподвижной системе отсчета. Надо понимать, что сила Лоренца, действующая на свободные заряды, будет направлена перпендикулярно именно этой скорости. Во-вторых, следует заметить, что лишь параллельная крылу составляющая этой силы вызовет перемещение зарядов вдоль крыла. В-третьих, движение зарядов вдоль крыла будет происходить до тех пор, пока сила электростатического поля не станет равной параллельной крылу составляющей силы Лоренца, вызывающей движение зарядов.



3.4.4. По двум вертикальным проводящим рейкам (см. рисунок), находящимся на расстоянии $l = 0{,}5$ м и соединенным резистором с сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом, под действием силы тяжести начинает скользить проводник, длина которого l и масса $m = 100$ г. Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}4$ Тл перпендикулярна плоскости рисунка. Какова установившаяся скорость v движения проводника, если сопротивлением самого проводника и реек, а также трением можно пренебречь?

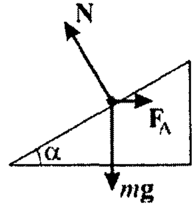
Решение. Предоставленный самому себе проводник начнет под действием силы тяжести двигаться вниз. В результате этого возникнет изменение магнитного потока через контур, образованный рейками, резистором и проводником, и, как следствие, ЭДС индукции и индукционный ток I в контуре. Этот ток, протекая по подвижному проводнику, приведет к появлению силы Ампера F_A, которая, как нетрудно убедиться, будет направлена против скорости проводника. Таким образом, уравнение движения проводника запишется следующим образом: $ma = mg - F_A$. Учитывая, что $F_A = IBl$, а $I = \mathcal{E}/R$, где $\mathcal{E} = Bvl$ – ЭДС индукции, находим, что величина силы Ампера пропорциональна скорости проводника v: $F_A = \frac{B^2l^2}{R}v$. Движение проводника установится, т.е. ускорение проводника a обратится в нуль, когда сила Ампера сравняется по величине с силой тяжести. Объединяя записанные выражения, находим, что скорость установившегося движения $v = \frac{mgR}{B^2l^2} = 2{,}5$ м/с.

При решении подобных задач могут возникнуть трудности в определении направления индукционного тока, возникающего в контуре. Надо иметь в виду, что направление индукционного тока определяется правилом Ленца. В качестве дополнительной проверки может служить тот факт, что сила Ампера должна быть направлена против скорости стержня.



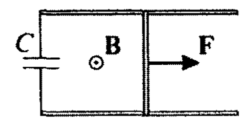
3.4.5. По параллельным рельсам, наклоненным под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали, соскальзывает без трения проводящий брусок массой $m = 100$ г. В верхней части рельсы замкнуты резистором с сопротивлением $R = 20$ Ом. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Чему равна сила тока I, текущего по бруску, если известно, что он движется с постоянной скоростью $v = 1$ м/с? Сопротивлением бруска и рельсов пренебречь.

Решение. Предоставленный самому себе брусок будет соскальзывать по наклонным рельсам вниз. При движении бруска в нем возникнет ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bvl\cos\alpha$, которая вызовет в контуре индукционный ток $I = \mathcal{E}/R$. Этот ток, протекая по бруску, приведет к появлению силы Ампера $F_A = IBl$, которая направлена горизонтально в сторону, противоположную скорости бруска. При равномерном движении бруска сумма сил, действующих на него (см. рисунок), равна нулю. В проекции на направление рельсов имеем: $mg\sin\alpha = IBl\cos\alpha$. Исключая из записанных равенств B, находим ответ: $I = \sqrt{\dfrac{mgv\sin\alpha}{R}} \approx 0{,}16$ А.



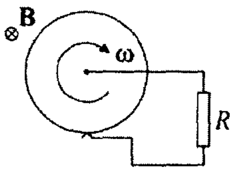
При решении этой задачи следует отметить, что брусок будет двигаться равномерно в результате того, что равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю, что возможно в данном случае только при наличии силы Ампера, направленной против скорости бруска.

3.4.6. По двум металлическим параллельным рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости и замкнутым на конденсатор емкостью $C = 5000$ мкФ, может без трения двигаться металлический стержень массой $m = 45$ г и длиной $l = 0{,}5$ м. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл, направленной вверх. К середине стержня перпендикулярно ему и параллельно рейкам приложена сила $F = 0{,}5$ Н. Определить ускорение стержня. Сопротивлением реек, стержня и подводящих проводов пренебречь. В начальный момент скорость стержня равна нулю.

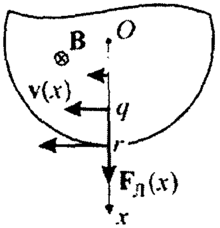


Решение. При движении стержня в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}$, которая в каждый момент времени равна напряжению на конденсаторе q/C, где q – заряд конденсатора. Индукционный ток I в контуре, с одной стороны, заряжает конденсатор, с другой – приводит к появлению силы Ампера, действующей на стержень в направлении, противоположном силе F. Следовательно, уравнение движения стержня (второй закон Ньютона) имеет вид: $ma = F - F_A = F - IBl$. Поскольку $\mathscr{E} = Bvl = q/C$, ток в контуре $I = \dot{q} = B\dot{v}lC = BalC$. Здесь точкой обозначена производная по времени и учтено, что ускорение проводника $a = \dot{v}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $a = \dfrac{F}{m + B^2l^2C} = 10$ м/с^2.

Следует обратить особое внимание на главный момент в этой задаче: ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возникающая в контуре, в каждый момент времени равна напряжению на конденсаторе q/C.



3.4.7. Металлический диск радиусом $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\omega = 628$ рад/с. Два скользящих контакта, один на оси диска, другой – на краю, соединяют диск с резистором сопротивлением $R = 5$ Ом. Какая мощность N выделяется на резисторе? Сопротивлением диска и соединительных проводов пренебречь.



Решение. Свободные заряды, находящиеся во вращающемся металлическом диске, движутся по окружностям. Линейная скорость заряда q, располагающегося на расстоянии x от центра диска (точки O), $v(x) = \omega x$; сила Лоренца, действующая на него, $F_Л(x) = q\omega xB$. Поскольку эта сила линейно зависит от координаты, ее работа по перемещению заряда от центра диска до его края, $A = \dfrac{1}{2}\left(F_Л(0) + F_Л(r)\right) = \dfrac{q\omega Br^2}{2}$. Следовательно, ЭДС индукции, возникающая между центром и краем диска, $\mathscr{E} = \dfrac{A}{q} = \dfrac{\omega Br^2}{2}$.

Мощность, выделяющаяся на резисторе, $N = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$. Тогда

$$N = \frac{\omega^2 B^2 r^4}{4R} \approx 1{,}96 \text{ Вт.}$$

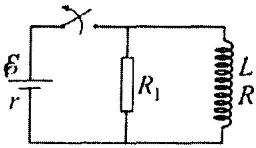
При решении этой задачи, как правило, вызывает затруднение вопрос, что же приводит к появлению индукционного тока. Не стоит забывать о наличии в металлическом вращающемся диске свободных носителей зарядов, на которые действует сила Лоренца, приводя их в движение относительно диска.

3.4.8. На проволочную катушку надето проводящее кольцо, покрытое изоляцией. Плоскость кольца перпендикулярна оси катушки. При линейном нарастании тока в катушке от нуля до $I_1 = 5$ А за время $t_1 = 9$ с в кольце выделяется количество теплоты $Q_1 = 0{,}5$ Дж. Какое количество теплоты Q_2 выделится в кольце, если ток в катушке будет линейно возрастать от нуля до $I_2 = 10$ А за время $t_2 = 3$ с?

Решение. Магнитный поток Ф через площадь, ограниченную кольцом, пропорционален току в катушке: $\Phi = LI$, где L – коэффициент пропорциональности. При линейном нарастании тока через катушку в кольце возникает постоянная ЭДС индукции, равная по модулю $|\mathcal{E}_i| = L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, где ΔI – изменение тока через катушку за время Δt. Ток в кольце, имеющем сопротивление R, согласно закону Ома, равен $I_к = \dfrac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \dfrac{L}{R}\cdot\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$. За время Δt в кольце выделяется количество теплоты $Q = RI_к^2\Delta t = \dfrac{L^2}{R}\cdot\dfrac{(\Delta I)^2}{\Delta t}$. В первом случае $Q_1 = \dfrac{L^2}{R}\cdot\dfrac{I_1^2}{t_1}$, во втором $Q_2 = \dfrac{L^2}{R}\cdot\dfrac{I_2^2}{t_2}$. Отсюда

$$Q_2 = Q_1\frac{I_2^2}{I_1^2}\cdot\frac{t_1}{t_2} = 6 \text{ Дж.}$$

При решении этой задачи важно понимать причину возникновения тока в кольце, а именно, наличие индукционной связи между кольцом и катушкой. Изменение тока в катушке вызывает изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную кольцом, что и приводит к появлению в кольце ЭДС индукции.



3.4.9. Катушка индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн с сопротивлением обмотки $R = 2$ Ом подключена параллельно с резистором сопротивлением $R_1 = 8$ Ом к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе R_1 после отключения источника?

Решение. При замкнутом ключе, согласно закону Ома, через источник течет ток $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r + RR_1/(R+R_1)} = \dfrac{\mathcal{E}(R+R_1)}{rR + rR_1 + RR_1}$. Этот ток разветвляется на два тока: I_L и I_R, протекающих, соответственно, через катушку и резистор R_1 и удовлетворяющих системе уравнений: $I_L + I_R = I$, $I_L R = I_R R_1$. Отсюда $I_L = I\dfrac{R_1}{R+R_1} = \dfrac{ER_1}{rR + rR_1 + RR_1}$. После отключения источника (размыкания ключа) возникающая в катушке ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ будет какое-то время поддерживать в цепи, образованной катушкой и резистором R_1, ток $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R+R_1}$. При этом полная мощность $N = I_1^2(R+R_1)$, выделяющаяся в этой цепи, распределится между катушкой и резистором пропорционально их сопротивлениям: $N_L = I_1^2 R$, $N_R = I_1^2 R_1$. Следовательно, мощность, выделяющаяся на резисторе, составляет от полной мощности, выделяющейся в этой цепи, следующую долю: $N_R = N\dfrac{R_1}{R+R_1}$. Поскольку данное отношение мощностей не зависит от времени, очевидно, что такую же долю составит и энергия, выделившаяся на резисторе за время существования ЭДС самоиндукции, от полной энергии, выделившейся в цепи. В свою очередь, полная выделившаяся энергия равна энергии $LI_L^2/2$ магнитного поля в катушке в момент отключения источника. Таким образом, количество теплоты, выделившейся на резисторе R_1 после отключения источника, равно: $Q=\frac{LI_L^2}{2}\cdot\frac{R_1}{R+R_1}$. Подставляя в это равенство найденный ранее ток через катушку, получаем ответ:

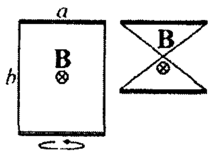
$$Q=\frac{L\mathcal{E}^2R_1^3}{2(R+R_1)(rR+rR_1+RR_1)^2}\approx 1{,}14 \text{ Дж.}$$

При решении этой задачи, важно понимать, что после размыкания ключа в катушке возникнет ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, которая какое-то время будет поддерживать ток *в цепи, образованной катушкой и резистором*. Именно этот ток пройдет через резистор после отключения источника. Кроме того, следует уделить особое внимание довольно сложному моменту – определению доли энергии, выделившейся на резисторе за время существования ЭДС самоиндукции.

Задачи для самостоятельного решения

3.4.10. Катушка из $n=100$ одинаковых витков площадью $S=2$ см^2 каждый присоединена к баллистическому гальванометру. Вначале катушка находилась между полюсами магнита в однородном магнитном поле с индукцией $B=1{,}5$ Тл, параллельной оси катушки. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Какое количество электричества q протекло через гальванометр? Сопротивление всей цепи $R=200$ Ом.

Ответ: $q=\frac{BSn}{R}=1{,}5\cdot 10^{-4}$ Кл.



3.4.11. Два прямых проводящих стержня соединены гибкими проводниками и образуют прямоугольный контур со сторонами $a = 30$ см и $b = 50$ см. Контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл, направленной перпендикулярно его плоскости. Какой заряд Δq протечет по контуру, если перевернуть на 180° один из стержней, оставляя гибкие проводники натянутыми и не допуская замыкания между ними? Сопротивление контура $R = 1$ Ом.

Ответ: $\Delta q = \dfrac{Bab}{R} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Кл.

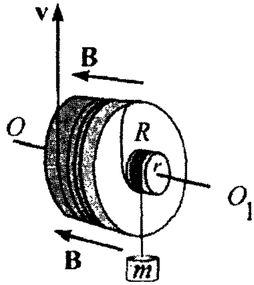
3.4.12. Квадратная рамка с прямой перемычкой, соединяющей середины противоположных сторон, помещена в однородное магнитное поле $B = 0{,}5$ Тл, вектор индукции которого **B** перпендикулярен плоскости рамки. Рамку, сгибая вдоль перемычки, складывают вдвое так, что плоскость одной ее половины все время остается перпендикулярной **B**. Длина стороны рамки равна $L = 10$ см, сопротивление единицы длины тонкой проволоки, из которой изготовлены рамка и перемычка, равно $\rho = 0{,}1$ Ом/м. Пренебрегая индуктивностью проволоки, найти заряд, протекший через перемычку.

Ответ: $\Delta Q = \dfrac{BL}{4\rho} = 0{,}125$ Кл.

3.4.13. Из двух кусков тонкой медной и свинцовой проволок, имеющих одинаковую длину и сечение, с сопротивлениями $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 24$ Ом изготовлено кольцо радиусом $r = 10$ см. Оно помещено в однородное магнитное поле, индукция которого перпендикулярна плоскости кольца и изменяется во времени с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 0{,}3$ Тл/с. Определить разность потенциалов между точками соединения разнородных проволок.

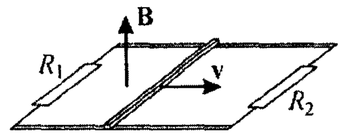
Ответ: $|\Delta\varphi| = \dfrac{|R_1 - R_2|}{R_1 + R_2} \cdot \dfrac{\pi r^2}{2} \cdot \dfrac{\Delta B}{\Delta t} \approx 4$ мВ.

3.4.14. Каркас, состоящий из двух коаксиальных цилиндров с радиусами $r = 10$ см и $R = 20$ см, может свободно вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси OO_1. На каркас намотана изолированная проволока так, как показано на рисунке. К нижнему концу проволоки прикреплен груз, а ее верхний конец тянут с постоянной скоростью $v = 1$ м/с вертикально вверх. Цилиндры находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, параллельной оси цилиндров. Найти напряжение между концами проволоки, когда на цилиндре радиусом R остается хотя бы часть проволоки.

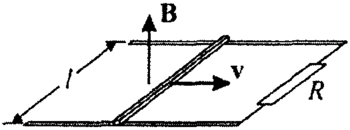


Ответ: $U = \dfrac{vB}{2R}(R^2 - r^2) = 37{,}5$ мВ.

3.4.15. По двум параллельным проводам со скоростью $v = 20$ см/с, направленной вдоль проводов, движется проводящий стержень. Между концами проводов включены резисторы $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 4$ Ом. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Провода помещены в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 10$ Тл перпендикулярна плоскости, проходящей через провода. Найти силу тока I, текущего по стержню. Сопротивлением проводов, стержня и контактов между ними пренебречь.

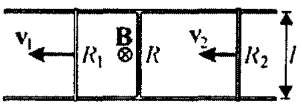


Ответ: $I = Bvd\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = 0{,}15$ А.



3.4.16. Параллельные проводящие шины, расположенные в горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга, замкнуты на резистор сопротивлением R и помещены в однородное постоянное магнитное поле, вектор индукции которого направлен вертикально вверх. По шинам без трения может перемещаться проводящий стержень, сохраняя постоянно контакт с шинами. Найти величину и направление силы $\mathbf{F}$, которую нужно приложить к стержню, чтобы он двигался вдоль шин поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Сопротивлением шин и стержня, а также трением пренебречь. При расчетах положить: $R = 100$ Ом, $B = 2$ Тл, $v = 0{,}1$ м/с, $l = 20$ см.

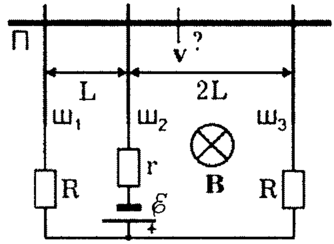
Ответ: $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{v}}{v} F$, $F = \dfrac{B^2 l^2 v}{R} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Н.



3.4.17. Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии $l = 1$ м друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 1$ Тл. Стержни соединены неподвижным проводником сопротивлением $R = 1$ Ом. Два других проводника сопротивлениями $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 1$ Ом находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 1$ м/с. Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.

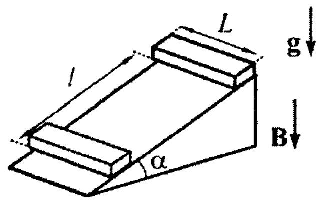
Ответ: $I = \dfrac{Bl(v_1 R_2 + v_2 R_1)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} = 0{,}8$ А.

3.4.18. Три одинаковые металлические параллельные шины ш$_1$÷ш$_3$, лежащие в одной плоскости, находятся в однородном магнитном поле с индукцией **B**, перпендикулярной этой плоскости. Направление магнитного поля, ЭДС батареи, расстояния между шинами, и сопротивления резисторов указаны на рисунке. По шинам, перпендикулярно им, равномерно движется металлическая перемычка П. С какой скоростью **v** должна двигаться перемычка, чтобы ток в средней шине был равен нулю? Сопротивлением шин, перемычки и контактов между ними пренебречь. Провести численный расчет для $B = 1$ Тл, $L = 10$ см, $\mathscr{E} = 2$ В.



Ответ: скорость перемычки равна $v = \dfrac{2\mathscr{E}}{BL} = 40$ м/с и направлена к источнику в схеме.

3.4.19.[E] Тонкий алюминиевый брусок прямоугольного сечения, имеющий длину $L = 0{,}5$ м, соскальзывает из состояния покоя по гладкой наклонной плоскости из диэлектрика в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл (см. рисунок). Плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Продольная ось бруска при движении сохраняет горизонтальное направление. Найдите величину ЭДС индукции на концах бруска в момент, когда брусок пройдет по наклонной плоскости расстояние $l = 1{,}6$ м.



Ответ: $\mathscr{E} = BL\cos\alpha\sqrt{2gl\sin\alpha} \approx 0{,}17$ В.

3.4.20. В сильном однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл на расстоянии $l = 20$ см друг от друга закреплены два тонких вертикальных проводящих стержня.

Плоскость, в которой расположены стержни, перпендикулярна индукции магнитного поля. К верхним концам стержней подключена катушка индуктивностью $L = 1$ Гн. На стержни надевают тонкую проводящую перемычку массой $m = 40$ г и отпускают ее с нулевой начальной скоростью. Перемычка начинает скользить по стержням без нарушения контакта с ними, оставаясь все время горизонтальной. Найти период установившихся колебаний перемычки. Сопротивлением проводников и трением пренебречь. Индуктивность стержней и перемычки много меньше индуктивности катушки.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi\sqrt{mL}}{lB} \approx 3{,}14$ с.

3.4.21. Тонкое проволочное кольцо радиусом $r = 10$ см и сопротивлением $R = 1$ Ом находится в однородном магнитном поле, индукция которого изменяется по закону $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin\omega t$, где $B_0 = 0{,}1$ Тл. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости кольца. Проволока, из которой изготовлено кольцо, выдерживает на разрыв силу, модуль которой равен $F = 10$ Н. При какой частоте ω кольцо разорвется? Индуктивностью кольца пренебречь.

Ответ: $\omega > \dfrac{2RF}{\pi r^3 B_0^2} \approx 6{,}4 \cdot 10^5$ рад/с.

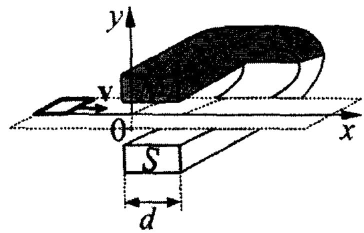
3.4.22. По тонкому диэлектрическому кольцу массой $m = 1$ г, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, равномерно распределен заряд $Q = 10^{-7}$ Кл. Кольцо находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10$ Тл. Найти угловую скорость, которую приобретет кольцо после выключения магнитного поля.

Ответ: $\omega = \dfrac{QB}{2m} = 5 \cdot 10^{-4}$ рад/с.

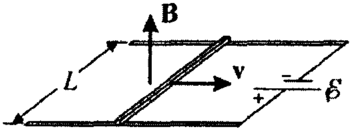
3.4.23. Горизонтально расположенное тонкое проволочное кольцо поместили в вертикальное магнитное поле, величина индукции которого изменяется по гармоническому закону с частотой $\nu = 50$ Гц. За время $\tau = 8$ с кольцо нагрелось на $\Delta t = 1\,°C$. Найти, за какое время τ_1 это кольцо нагрелось бы на столько же, если бы частота изменения индукции магнитного поля была в $n = 2$ раза больше. Тепловыми потерями кольца и его индуктивностью пренебречь.

Ответ: $\tau_1 = \dfrac{\tau}{n^2} = 2$ с.

3.4.24.[E] Квадратная рамка со стороной $b = 5$ см изготовлена из медной проволоки сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Рамку перемещают по гладкой горизонтальной поверхности с постоянной скоростью V вдоль оси Ox. Начальное положение рамки изображено на рисунке. За время движения рамка проходит между полюсами магнита и вновь оказывается в области, где магнитное поле отсутствует. Индукционные токи, возникающие в рамке, оказывают тормозящее действие, поэтому для поддержания постоянной скорости движения к ней прикладывают внешнюю силу F, направленную вдоль оси Ox. С какой скоростью движется рамка, если суммарная работа внешней силы за время движения равна $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж? Ширина полюсов магнита $d = 20$ см, магнитное поле имеет резкую границу, однородно между полюсами, а его индукция $B = 1$ Тл.

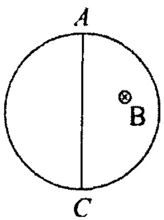


Ответ: $V = \dfrac{AR}{2B^2b^3} = 1$ м/с.



3.4.25. В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленной вертикально вверх, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $L = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с. Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в стержне за время $\tau = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

Ответ: $Q = \left(\dfrac{\mathscr{E} - Blv}{R + r}\right)^2 R\tau \approx 64{,}3$ Дж.



3.4.26. Из куска однородной проволоки длиной $l = 1$ м, сопротивление которого $R = 10$ Ом, спаяна фигура в виде кольца с хордой AC, равной диаметру кольца (см. рисунок). Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого **B** перпендикулярен плоскости кольца. Модуль этого вектора меняется со временем по закону $B = kt$, где $k = 10$ Тл/с. Найти выделяемую в проволоке мощность N.

Ответ: $N = \dfrac{k^2 \pi l^4}{16R(\pi + 1)^3} \approx 2{,}76$ Вт.

3.4.27. При равномерном изменении силы тока через проволочную катушку в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathscr{E} = 10$ В. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд q протечет за время $\Delta t = 0{,}05$ с через замкнутый проволочный виток, надетый на катушку так, что его плоскость перпендикулярна оси катушки? Сопротивление витка $R = 0{,}2$ Ом.

Ответ: $q = \dfrac{\mathscr{E}\Delta t}{NR} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Кл.

3.4.28.[E] В катушке сила тока равномерно увеличивается со скоростью $\dfrac{dI}{dt} = 2$ А/с. При этом в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 20$ В. Какова энергия магнитного поля катушки при силе тока в ней $I = 5$ А?

Ответ: $W = \dfrac{\mathcal{E}I^2}{2(dI/dt)} = 125$ Дж.

3.4.29. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В замыкают на катушку с индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн. Определить время, необходимое для увеличения энергии магнитного поля этой катушки до $W = 2{,}25$ Дж, пренебрегая омическим сопротивлением всей цепи.

Ответ: $t = \dfrac{\sqrt{2WL}}{\mathcal{E}} = 1$ с.

3.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Примеры решения задач и методические рекомендации

3.5.1. Конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 100$ В, подсоединяют к катушке индуктивностью $L = 1$ мГн. Чему равна величина тока I через катушку спустя время $t_0 = 0{,}785 \cdot 10^{-5}$ с после подключения конденсатора? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

Решение. При подключении заряженного конденсатора к катушке в образовавшемся контуре возникают электромагнитные колебания с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При этом заряд на конденсаторе меняется во времени по закону $q = q_0 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$, где $q_0 = CU$ – начальный заряд на конденсаторе. Поскольку сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало, суммарная энергия электрического и магнитного поля в контуре сохраняется. Из закона сохранения энергии следует, что $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$. Выражая отсюда ток через катушку, имеем $I(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{q_0^2 - q^2} = \sqrt{\frac{C}{L}}U\sqrt{1 - \cos^2\frac{t}{\sqrt{LC}}}$. Величина тока в момент времени t_0 равна $I = \sqrt{\frac{C}{L}}U \sin\frac{t_0}{\sqrt{LC}} \approx 0{,}71$ А.

Следует обратить внимание на то, что *согласно условию задачи* в контуре возникают незатухающие колебания, и, следовательно, можно воспользоваться для решения этой задачи законом сохранения энергии.

3.5.2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ мГн и плоского воздушного конденсатора емкостью $C = 1$ нФ. Найти среднюю за период колебаний силу притяжения обкладок конденсатора друг к другу, если амплитуда тока в катушке равна $I_0 = 1$ А. Площадь обкладки конденсатора $S = 0{,}5$ м^2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение. Пусть в некоторый момент времени заряд на конденсаторе равен $q(t)$. Напряженность электрического поля, создаваемого одной из обкладок, $E_1(t) = \dfrac{q(t)}{2S\varepsilon_0}$. Поэтому сила электростатического притяжения между обкладками равна $F(t) = qE_1 = \dfrac{q^2(t)}{2S\varepsilon_0}$. При гармонических колебаниях в контуре с круговой частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ заряд на конденсаторе меняется со временем по закону $q(t) = q_0 \cos\omega_0 t$, где q_0 – амплитудное значение заряда. Следовательно, $F(t) = \dfrac{q_0^2}{2S\varepsilon_0}\cos^2\omega_0 t$. Используя формулу $\cos^2\omega_0 t = \dfrac{1+\cos 2\omega_0 t}{2}$ и учитывая, что среднее за период значение $\cos 2\omega_0 t$ равно нулю, находим среднее значение силы: $\overline{F} = \dfrac{q_0^2}{4S\varepsilon_0}$. По закону сохранения энергии при гармонических колебаниях $\dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{q_0^2}{2C}$, откуда $q_0 = \sqrt{LC}I_0$. Отсюда

$$\overline{F} = \frac{LCI_0^2}{4S\varepsilon_0} \approx 0{,}056 \text{ Н}.$$

Ошибку в подобных задачах, как правило, допускают при неверном определении среднего за период значения функции $\cos^2\omega_0 t$. Будет полезным изобразить графики зависимостей $q(t)$ и $F(t)$ и показать на них средние значения этих функций.

3.5.3.[E] В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности $I_m = 5$ мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = 2{,}0$ В. В момент времени t напряжение на конденсаторе равно $U = 1{,}2$ В. Найдите силу тока в катушке в этот момент.

Решение. Так как колебательный контур является идеальным, то запасенная в нем энергия остается неизменной. В процессе свободных электромагнитных колебаний в контуре максимальная энергия, запасенная в магнитном поле катушки, преобразуется в равную ей максимальную энергию, запасенную в электрическом поле конденсатора: $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$. В момент времени t энергия $\frac{LI^2}{2}$ запасена в магнитном поле катушки, а энергия $\frac{CU^2}{2}$ – в электрическом поле конденсатора (здесь I – искомая сила тока в катушке в момент времени t). Как следует из закона сохранения энергии, $\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}$. Решая полученную систему уравнений, находим: $I = I_m\sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_m}\right)^2} = 4$ мА.

При решении этой задачи нужно дважды воспользоваться законом сохранения энергии. Такой подход избавляет от необходимости рассматривать зависимости от времени силы тока в контуре и напряжения на конденсаторе.

3.5.4.[E] В таблице показано, как изменялся заряд конденсатора в колебательном контуре с течением времени:

t, 10^{-6} с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q, 10^{-9} Кл	2	1,42	0	–1,42	-2	–1,42	0	1,42	2	1,42

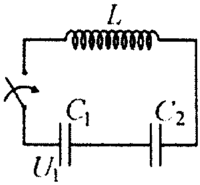
Какова энергия $W_{м1}$ магнитного поля катушки в момент времени $t_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ с, если емкость конденсатора $C = 50$ пФ? Ответ выразите в нДж и округлите его до целых.

Решение. Для решения задачи надо проанализировать таблицу. Из нее видно, что в контуре происходят незатухающие гармонические колебания, при которых максимальное значение модуля заряда пластины конденсатора $q_{max} = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл достигается в моменты времени $t = (0, 4, 8, ...) \cdot 10^{-6}$ с. То, что это действительно *максимальный* заряд, подтверждается тем, что в соседние с максимумом равноотстоящие от него моменты времени, например, $t = 3 \cdot 10^{-6}$ с и $t_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ с, величины зарядов одинаковы и равны $q_1 = -1{,}42 \cdot 10^{-9}$ Кл.

При таких колебаниях энергия электрического поля $\frac{q_{max}^2}{2C}$, запасенная в конденсаторе, превращается в энергию магнитного поля катушки $\frac{LI_{max}^2}{2}$ в моменты времени, когда $q = 0$. В промежуточные моменты времени, например, t_1, энергия контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей: $\frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{q_1^2}{2C} + W_{м1}$. Отсюда получаем ответ:

$$W_{м1} = \frac{q_{max}^2 - q_1^2}{2C} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 20 \text{ нДж}.$$

При решении этой задачи следует обратить внимание на анализ экспериментальных данных, особенно на доказательство того факта, что в моменты времени $t = (0, 4, 8, ...) \cdot 10^{-6}$ с заряд на конденсаторе был максимальным. Кроме того, важно понимать, что энергия колебательного контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей.

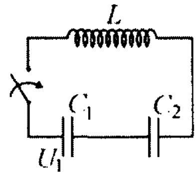


3.5.5. В цепи, показанной на рисунке, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до напряжения $U_1 = 200$ В, а конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. До какого максимального напряжения $U_{2\max}$ может зарядиться конденсатор C_2 в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.

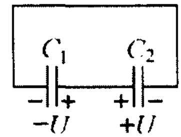
Решение. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q (так как конденсаторы соединены последовательно), а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре. Поскольку в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль, справедливо равенство: $\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{(C_1U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}$. Отсюда $q = 2U_1\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем ответ: $U_{2\max} = \frac{2U_1C_1}{C_1 + C_2} \approx 364$ В.

При решении этой задачи надо понимать, что в некоторый момент времени вся энергия магнитного поля катушки перейдет в энергию электрического поля конденсаторов. Кроме того, не менее важен тот факт, что в этот момент времени ток в цепи станет равным нулю.

3.5.6. Катушка индуктивностью $L = 3$ мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рисунок), один из которых, емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф, заряжен вначале до напряжения $U_1 = 150$ В, а второй, емкостью $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ Ф, разряжен. Чему будет равна максимальная сила тока I_{max} в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.



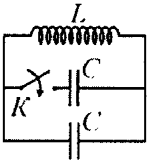
Решение. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания. При этом ток в цепи и напряжение на катушке сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Следовательно, когда в цепи достигается максимальный ток, напряжение на катушке обращается в нуль, и в этот момент напряжения на конденсаторах становятся равными по величине и противоположными по знаку (эквивалентная цепь изображена на рисунке). Обозначим через U величину напряжения на каждом из конденсаторов. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд на конденсаторах в рассматриваемый момент времени равен начальному заряду на конденсаторе C_1, т.е. $(C_1 + C_2)U = C_1U_1$, откуда $U = U_1 \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$. Согласно закону сохранения энергии в контуре, $\dfrac{C_1U_1^2}{2} = \dfrac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \dfrac{LI_{max}^2}{2}$.



Объединяя полученные выражения, находим ответ:

$$I_{max} = U_1\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}} = 0{,}75 \text{ А.}$$

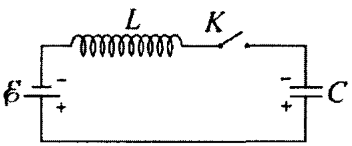
Следует отметить, что при решении этой задачи весьма полезной является эквивалентная электрическая цепь для момента времени, когда ток в катушке максимален. Именно в этот момент суммарное напряжение на конденсаторах обращается в нуль.



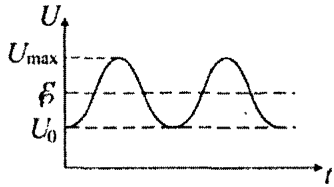
3.5.7. Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда напряжение на конденсаторе обратилось в нуль, к нему с помощью ключа K подсоединили еще один такой же конденсатор. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?

Решение. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно нулю, ток через катушку максимален, и запасенная в ней энергия равна $W=\frac{LI_0^2}{2}$, где I_0 – амплитуда тока. По закону сохранения энергии $\frac{LI_0^2}{2}=\frac{CU_0^2}{2}$, где U_0 – амплитуда напряжения на конденсаторе C до подключения второго конденсатора. При подключении второго конденсатора параллельно первому емкость контура удваивается, и закон сохранения энергии принимает вид: $\frac{LI_0^2}{2}=\frac{2CU_1^2}{2}$. Следовательно, $U_1=\frac{U_0}{\sqrt{2}}$. Таким образом, после подключения второго конденсатора амплитуда тока не изменяется, амплитуда напряжения уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Существенным является тот факт, что по условию задачи второй конденсатор подсоединяют именно в тот момент, когда напряжение на первом конденсаторе обращается в нуль, т.е. когда вся энергия колебательного контура сосредоточена в магнитном поле катушки.

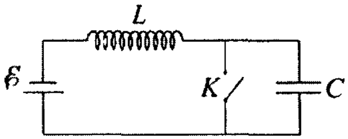


3.5.8. Цепь, изображенная на рисунке, состоит из конденсатора, катушки, источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K. В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью, указанной на рисунке. Какого максимального значения U_{max} может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь. Провести численный расчет для случая $\mathcal{E} = 200$ В, $U_0 = 199$ В.



Решение. После замыкания ключа в контуре возникнут гармонические колебания со смещенным положением равновесия. Пусть $\mathcal{E} > U_0$. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени изображена на рисунке. Начальная энергия конденсатора равна $W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$, работа источника по зарядке конденсатора до максимального напряжения $A = C(U_{max} - U_0)\mathcal{E}$, энергия контура в момент достижения максимального напряжения $W_{max} = \frac{CU_{max}^2}{2}$ (ток через катушку в этот момент равен нулю). По закону изменения энергии $W_0 + A = W_{max}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно U_{max}: $U_{max}^2 - 2\mathcal{E}U_{max} + 2\mathcal{E}U_0 - U_0^2 = 0$. Корни этого уравнения: $U_{max} = 2\mathcal{E} - U_0$, $U_{max} = U_0$. Тогда $U_{max} = 2\mathcal{E} - U_0$ при $U_0 < \mathcal{E}$, $U_{max} = U_0$ при $U_0 \geq \mathcal{E}$. При численном расчете получаем $U_{max} = 2\mathcal{E} - U_0 = 201$ В.

Полезно обсудить аналогию процессов, происходящих в контуре после замыкания ключа, с колебаниями пружинного маятника, прикрепленного к потолку движущегося с ускорением лифта, и провести аналогичные рассуждения. Кроме того, не следует забывать, что при записи закона изменения энергии нужно учесть работу сторонних сил источника.

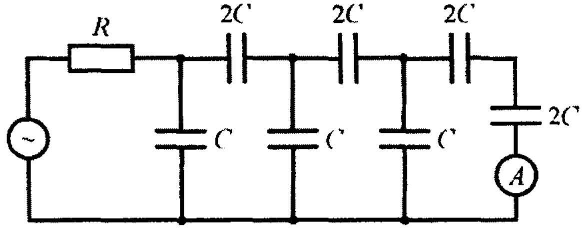


3.5.9. Цепь, изображенная на рисунке, состоит из конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ, катушки индуктивностью $L = 12{,}5$ мГн, источника с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K, первоначально находящегося в разомкнутом состоянии. В некоторый момент времени ключ замкнули и держали в замкнутом состоянии в течение времени $\tau = 1$ мс, а затем разомкнули. До какого максимального напряжения $U_{\max}$ может зарядиться конденсатор после этого? Считать, что в момент замыкания ключа ток в цепи был равен нулю. Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

Решение. При замыкании ключа конденсатор практически мгновенно полностью разряжается, а ток через катушку начинает нарастать. По закону Ома для замкнутой цепи имеем: $L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \mathcal{E}$. Следовательно, через время τ ток в цепи достигнет величины $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{L}\tau$. После размыкания ключа в контуре возникают гармонические колебания. Конденсатор начинает заряжаться, и в момент достижения максимального напряжения $U_{\max}$ на нем ток через катушку обращается в нуль. За время, прошедшее после размыкания ключа до момента достижения максимального напряжения на конденсаторе, источник перемещает по цепи заряд $q = CU_{\max}$, совершив работу $A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}U_{\max}$. По закону сохранения энергии имеем: $\dfrac{LI_0^2}{2} + A = \dfrac{CU_{\max}^2}{2}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно $U_{\max}$, которое имеет вид: $U_{\max}^2 - 2\mathcal{E}U_{\max} - \dfrac{\mathcal{E}^2\tau^2}{LC} = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень. Следовательно, $U_{\max} = \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{\tau^2}{LC}}\right) = 1000$ В.

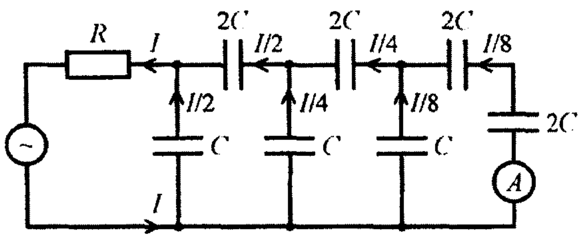
При решении этой задачи было бы ошибкой не учесть работу сторонних сил источника. Кроме того, следует обратить внимание на то, что из двух полученных ответов один не удовлетворяет условию задачи.

3.5.10. Найти эффективное значение силы тока, текущего через амперметр в цепи, схема которой изображена на рисунке.



Найти также, какая средняя мощность выделяется во всей цепи за один период изменения напряжения. Сопротивлением амперметра, источника переменного напряжения и соединительных проводов пренебречь. Напряжение на клеммах источника изменяется по закону $U = U_0 \sin \omega t$. Принять $R = 50$ Ом, $C = 1$ мкФ, $\omega = 10^4$ рад/с, $U_0 = 10$ В.

Решение. Из формул для вычисления емкости последовательно и параллельно соединенных конденсаторов следует, что общая емкость конденсаторов, подключенных последовательно с резистором, равна $2C$. Поэтому через источник течет переменный ток с амплитудным значением $I = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(2\omega C)^2}}$. Из соображений симметрии следует, что токи в участках цепи распределены так, как показано на рисунке. Поэтому через амперметр течет ток



с амплитудным значением $I/8$, и амперметр показывает эффективное значение силы тока

$$I_A = \frac{I}{8\sqrt{2}} = \frac{U_0}{8\sqrt{2}\sqrt{R^2 + 1/(2\omega C)^2}} = \frac{\omega C U_0}{4\sqrt{2(1+4\omega^2 R^2 C^2)}} = 12{,}5 \text{ мА}.$$

Средняя мощность, выделяющаяся в цепи за один период изменения напряжения источника, может быть найдена при помощи формулы: $N = \frac{1}{2} I^2 Z \cos\varphi$, где Z – сопротивление цепи переменному току, φ – сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения. Так как $\cos\varphi = R/Z$, то

$$N = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2 R}{R^2 + 1/(2\omega C)^2} = \frac{2R(U_0 \omega C)^2}{1 + (2\omega RC)^2} = 0{,}5 \text{ Вт}.$$

Отметим, что при решении задач, в которых требуется отыскать мощность, выделяющуюся на участке цепи переменного тока, следует помнить про множитель $\cos\varphi$, который содержится в формуле для вычисления мощности. Но, поскольку в рассматриваемом случае вся мощность выделяется в резисторе R, а сдвиг фаз между силой тока и напряжением на резисторе равен нулю, то $\cos\varphi = 1$. Поэтому для вычисления мощности можно пользоваться формулой $N = I_{\text{эфф}} U_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}}^2 R = \frac{1}{2} I^2 R$.

3.5.11. На какую длину волны λ настроен колебательный контур с индуктивностью $L = 10$ мкГн, если максимальный ток в контуре $I_{\text{m}} = 0{,}1$ А, а максимальное напряжение на конденсаторе $U_{\text{m}} = 6{,}28$ В? Скорость распространения электромагнитных волн $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

Решение. Длина электромагнитной волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний в контуре. Из закона сохранения энергии в колебательном контуре без потерь следует равенство: $\frac{L I_{\text{m}}^2}{2} = \frac{C U_{\text{m}}^2}{2}$.

Отсюда емкость конденсатора $C = L\frac{I_m^2}{U_m^2}$. Тогда

$$\lambda = 2\pi c\frac{LI_m}{U_m} = 300 \text{ м.}$$

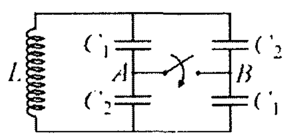
При решении подобных задач важно понимать, что при свободных колебаниях в контуре происходит взаимное превращение энергии электрического и магнитного полей. Строго говоря, применение закона сохранения энергии возможно лишь в случае, когда колебания не сопровождаются потерями энергии на излучение и в активном сопротивлении контура. Однако, если колебания происходят с небольшой потерей энергии, то на протяжении короткого интервала времени (например, нескольких периодов колебаний) потерями энергии в контуре можно пренебречь.

Задачи для самостоятельного решения

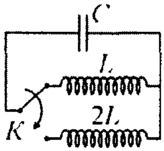
3.5.12. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний в контуре $T_1 = 10^{-4}$ с. Каков будет период T_2 колебаний в контуре, если конденсаторы включить последовательно?

Ответ: $T_2 = \frac{T_1}{2} = 5\cdot 10^{-5}$ с.

3.5.13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и четырех конденсаторов, соединенных, как показано на рисунке. Во сколько раз α изменится период собственных колебаний в контуре, если замкнуть ключ, соединяющий точки A и B? Емкости конденсаторов: $C_1 = 10^{-8}$ Ф, $C_2 = 4\cdot 10^{-8}$ Ф.



Ответ: $\alpha = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1C_2}} = 1,25$.



3.5.14. Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда ток через катушку обратился в нуль, с помощью ключа K отсоединили эту катушку, и вместо нее подсоединили катушку с вдвое большей индуктивностью. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?

Ответ: после подключения катушки с удвоенной индуктивностью амплитуда напряжения не изменяется, амплитуда тока уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

3.5.15. Газоразрядная лампа зажигается, когда напряжение между ее электродами становится равным $U_0 = 155$ В, и гаснет, если напряжение на ней падает ниже этой величины. Какое время Δt в течение одного полупериода светит такая лампа, подключенная к сети переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и амплитудой напряжения $U_m = 310$ В?

Ответ: $\Delta t = \dfrac{1}{2\pi f}\left(\pi - 2\arcsin\dfrac{U_0}{U_m}\right) \approx 6{,}7\cdot 10^{-3}$ с.

3.5.16. Школьник, используя вольтметр, предназначенный для измерения как постоянного, так и переменного напряжений, обнаружил, что при подключении к розетке с обозначением «~220» вольтметр показывает напряжение $U_1 = 220$ В, а при подключении к большому аккумулятору – напряжение $U_2 = 100$ В. Какое напряжение покажет вольтметр, если соединить оба этих источника последовательно, то есть если соединить одну из клемм аккумулятора с одним из выводов розетки, а к другой клемме и второму выводу розетки подключить вольтметр?

Ответ: $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \approx 242$ В.

3.5.17. Катушка индуктивностью $L = 10$ мГн, имеющая сопротивление R, соединена последовательно с конденсатором. Получившаяся цепь подключена к источнику гармонического напряжения частотой $\omega = 10^5$ рад/с. После того, как обкладки конденсатора соединили друг с другом при помощи короткого провода с малым сопротивлением, оказалось, что мощность, потребляемая цепью от источника, не изменилась. Пренебрегая потерями на излучение, найти емкость конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{1}{2L\omega^2} = 5$ нФ.

3.5.18. В колебательном контуре конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ заряжен до максимального напряжения $U_m = 100$ В. Определить резонансную частоту ν_0 колебаний в контуре, если максимальный ток в нем $I_m = 6{,}28$ А. Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

Ответ: $\nu_0 = \dfrac{I_m}{2\pi C U_m} = 10^4$ Гц.

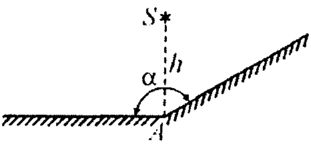
3.5.19. Какую емкость C нужно подключить к катушке индуктивностью $L = 0{,}001$ Гн, чтобы полученный колебательный контур был настроен в резонанс с электромагнитной волной, длина которой $\lambda = 300$ м? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

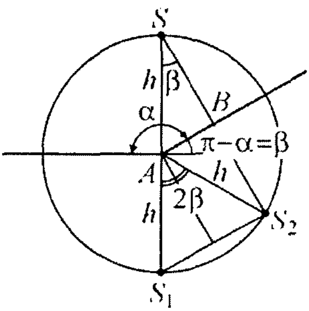
Ответ: $C = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 \approx 25$ пФ.

3.6. ОПТИКА

Примеры решения задач и методические рекомендации

3.6.1. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 150^\circ$. Точечный источник света S расположен на перпендикуляре к одному из зеркал, восстановленном в точке A, на расстоянии $h = 10$ см от зеркала (см. рисунок). Каково расстояние l между изображениями источника в зеркалах?



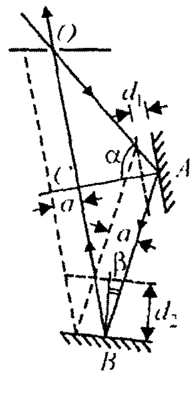


Решение. Изображение светящейся точки в плоском зеркале является мнимым и расположено симметрично относительно его отражающей поверхности. Согласно правилу построения изображения в плоском зеркале, для нахождения изображения точки достаточно опустить из нее на зеркало (или на его мысленное продолжение) перпендикуляр и продлить его на такое же расстояние за плоскость зеркала. Если зеркал несколько, изображения светящейся точки в каждом из них строятся аналогично. На рисунке представлены изображения S_1 и S_2 источника S в зеркалах, расположение которых задано в условии задачи. Из равенства треугольников ASB и AS_2B следует, что точки S, S_1 и S_2 лежат на одной окружности с центром в точке A. Поэтому $\angle S_1AS_2 = 2\beta$, где $\beta = \pi - \alpha$. Искомое расстояние между изображениями S_1 и S_2 равно $l = 2h\sin\beta$. Отсюда $l = 2h\sin(\pi - \alpha) = 2\cdot(10\,\text{см})\cdot\sin 30^\circ = 10$ см.

Будет весьма полезным найти такое положение источника, при котором данная система зеркал будет давать более чем два (например, три) изображения.

3.6.2. Оптическая схема, изображенная на рисунке, состоит из непрозрачного экрана с маленьким отверстием O и двух плоских зеркал *1* и *2*. Луч света проходит через отверстие O, отражается от зеркал *1* и *2* и выходит обратно через это отверстие, причем угол падения луча на зеркало *1* равен $\alpha = 60°$, а после отражения от зеркала *2* луч распространяется параллельно зеркалу *1*. Когда зеркало *1* сместили влево перпендикулярно самому себе на расстояние $d_1 = 6$ см в положение, показанное на рисунке пунктиром, луч перестал попадать в отверстие O. На какое расстояние d_2 нужно сместить перпендикулярно самому себе зеркало *2*, чтобы луч снова попал в это отверстие? Размер отверстия пренебрежимо мал.

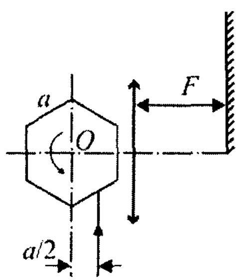
Решение. Пользуясь законами отражения света, построим ход светового луча при исходном и смещенном положениях зеркала *1* – ход луча в этих случаях изображен на рисунке сплошной и штриховой линиями, соответственно. Видно, что при перемещении зеркала *1* перпендикулярно самому себе на расстояние d_1 отраженный от него луч смещается на расстояние $a = 2d_1 \sin\alpha$, где α – угол падения. По условию треугольник ABC прямоугольный. Следовательно, $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, и угол падения β на зеркало *2* равен $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$. Из рисунка видно, что отраженный от зеркала *2* луч попадет в отверстие O, если сместить этот луч вправо на расстояние a. Отсюда имеем: $d_1 \sin\alpha = d_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. Значит



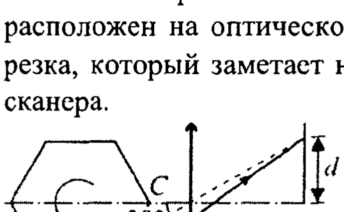
$d_2 = d_1 \dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$. Подставляя в эту формулу числа, заданные в

условии задачи, получаем ответ: $d_2 = 6\text{ см} \cdot \dfrac{\sin\pi/3}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi/3}{2}\right)} \approx 20$ см.

При решении подобных задач существенную роль играет правильно выполненный чертеж. Следует обратить внимание на то, что приведенный в решении чертеж, изображающий ход лучей до и после перемещения зеркала, заметно упрощает решение задачи.



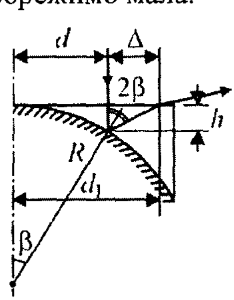
3.6.3. Оптический сканер представляет собой правильную шестигранную призму с зеркальной поверхностью, вращающуюся вокруг своей оси O. Ширина каждой грани равна a. Снизу на сканер падает вертикальный световой луч, продолжение которого проходит на расстоянии $a/2$ от оси вращения сканера (см. рисунок). Рядом со сканером вертикально расположена тонкая собирающая линза большого диаметра. Фокусное расстояние линзы равно $F = 26$ см, а ее главная оптическая ось проходит через ось вращения сканера. В правой фокальной плоскости линзы расположен широкий экран, нижний край которого расположен на оптической оси линзы. Определите длину d отрезка, который заметает на экране световой луч, отраженный от сканера.



Решение. Докажем, что максимально смещенное от нижнего края экрана световое пятно даст луч, испытавший при отражении от призмы наименьшее отклонение от направления первоначального распространения. Ход такого луча изображен на рисунке. Этот луч падает на грань AC рядом с ребром A призмы, чуть правее него. При повороте призмы из данного положения на малый угол грань AC уйдет из-под луча, и на ее месте окажется грань BA, на которую луч будет падать практически нормально и отразится назад, т.е. не попадет на экран. Луч, отраженный от призмы, вновь начнет попадать на нижний край экрана, когда грань BA повернется на угол $45°$. Таким образом, из рисунка и из проведенных рассуждений следует, что максимальное отклонение преломленного линзой луча достигается в момент, когда падающий на линзу луч составляет с ее главной оптической осью угол $30°$. Для построения хода этого луча при преломлении в тонкой собирающей линзе изобразим побочную оптическую ось (она показана на рисунке пунктиром). Преломленный линзой луч пересечет экран в той же точке, в которой его пересекает эта побочная оптическая ось. Указанная точка соответствует смещению светового пятна от нижнего края экрана на расстояние $d = F\,\mathrm{tg}\,30° = \dfrac{F}{\sqrt{3}} = \dfrac{26\text{ см}}{\sqrt{3}} \approx 15$ см.

При решении этой задачи важно понять, что максимальное смещение луча на экране происходит в том случае, когда отраженный от грани призмы луч максимально отклонен от главной оптической оси линзы. В этой связи очень полезно сделать соответствующий чертеж, пояснив рассуждения графически.

3.6.4. На плоскую поверхность плоско-вогнутой линзы, вогнутая поверхность которой имеет радиус $R = 35$ см и посеребрена, параллельно главной оптической оси на расстоянии $d = 5$ см от нее падает узкий пучок света. Пучок выходит через плоскую поверхность линзы после отражения от сферической поверхности. Найти, на каком расстоянии d_1 от оси выходит пучок из линзы, если толщина линзы на оси пренебрежимо мала.

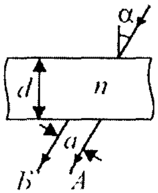


Решение. Ход одного из лучей, образующих пучок, изображен на рисунке, из которого видно, что $d_1 = d + \Delta$, где $\Delta = h\,\mathrm{tg}\,2\beta$, $h = R - \sqrt{R^2 - d^2}$. Учитывая, что $\sin\beta = \dfrac{d}{R}$, находим $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{d}{\sqrt{R^2 - d^2}}$.

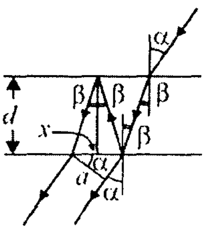
Используя формулу $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$, получаем ответ:

$$d_1 = \frac{Rd(2\sqrt{R^2-d^2}-R)}{R^2-2d^2} \approx 5{,}1 \text{ см.}$$

При решении этой задачи нужно учесть, что лучи, образующие световой пучок, падают на плоскую поверхность линзы по нормали и, следовательно, не преломляются. Это обстоятельство существенным образом упрощает решение задачи.



3.6.5. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d = 2$ см под углом $\alpha = 30°$. Каково расстояние a между лучом A, прошедшим пластину без отражения, и лучом $Б$, претерпевшим двукратное отражение от ее граней? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

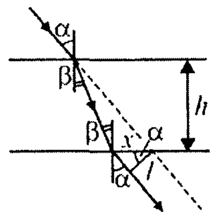


Решение. Ход лучей изображен на рисунке. Учитывая, что $\sin\beta = \dfrac{1}{n}\sin\alpha$, длину отрезка x можно выразить следующим образом: $x = 2d\operatorname{tg}\beta = 2d\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = 2d\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$. Поскольку искомое расстояние $a = x\cos\alpha$, ответ имеет вид:

$$a = d\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}22 \text{ см.}$$

Эта задача является классическим примером задач на отражение и преломление падающего луча в плоскопараллельной пластинке. При решении подобных задач надо понимать, что угол преломления луча на верхней поверхности плоскопараллельной пластинки равен углу отражения от ее нижней поверхности. Кроме того, будет полезным отметить, что, вообще говоря, свет выходит после преломлений на границе «стекло – воздух» как из нижней, так и из верхней граней пластинки.

3.6.6. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $\alpha = \arcsin 0{,}8$. Вышедший из пластинки луч оказался смещенным относительно продолжения падающего луча на расстояние $l = 2$ см. Какова толщина h пластинки, если показатель преломления стекла $n = 1{,}7$?

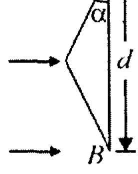


Решение. Ход луча изображен на рисунке, где β – угол преломления. Из рисунка видно, что длина отрезка x может быть выражена из равенств: $x = h\,\mathrm{tg}\,\alpha - h\,\mathrm{tg}\,\beta$, $x = \dfrac{l}{\cos\alpha}$. Отсюда $h = \dfrac{l}{\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)}$. По закону преломления $\sin\beta = \dfrac{1}{n}\sin\alpha$. Используя тригонометрические формулы, находим, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$. Тогда

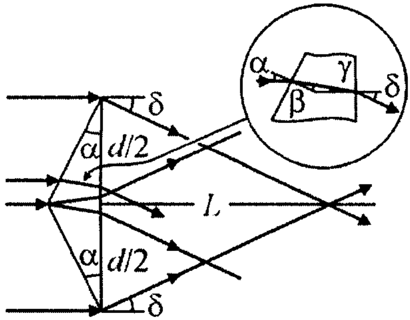
$$h = \frac{l\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)} \approx 4{,}2 \text{ см}.$$

Трудности, возникающие при решении этой задачи, связаны, как правило, с необходимыми тригонометрическими преобразованиями. Кроме того, чтобы предотвратить другую ошибку, следует отметить, что под смещением луча l, подразумевается *кратчайшее* расстояние между продолжением падающего луча и лучом, прошедшим сквозь пластинку.

3.6.7. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани AB, ширина которой $d = 5$ см. На каком расстоянии L от грани AB преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, угол при основании призмы $\alpha = 5{,}7°$. При расчетах учесть, что для малых углов $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.



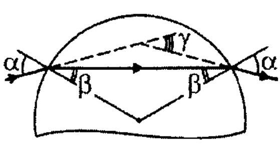
Решение. Каждый из лучей света, падающих на призму, преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (см. рисунок). Закон преломления на этих гранях, записанный с учетом



малости углов падения и преломления, даст следующие соотношения: $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$, $\delta = n\gamma$. Поскольку $\gamma = \alpha - \beta$, получаем для угла преломления δ значение $\delta = \alpha(n-1)$. Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут перекрываться на расстоянии L, удовлстворяющем условию: $L = \dfrac{d}{2\,\mathrm{tg}\,\delta} \approx \dfrac{d}{2\delta}$. Объединяя записанные выражения, находим ответ: $L = \dfrac{d}{2\alpha(n-1)} \approx 50$ см.

Важно отметить, что при решении этой задачи следует сразу использовать малость углов падения и преломления, записывая, закон преломления света в виде $\alpha = n\beta$. В противном случае решение станет неоправданно громоздким.

3.6.8. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения луча $\alpha = 45°$, показатель преломления стекла $n = 1{,}41$. Найти угол γ между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

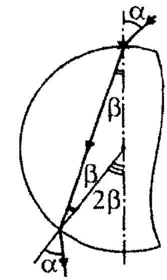


Решение. Световой луч испытывает преломление дважды: при входе в стеклянный шар и при выходе из него (см. ход лучей, изображенный на рисунке). При этом нормаль к преломляющей поверхности в точках падения луча совпадает с радиусом шара, проведенным в эти точки. Из рисунка видно, что искомый угол $\gamma = 2(\alpha - \beta)$, где α – угол падения луча на поверхность шара, совпадающий с углом преломления на выходе луча из шара, β – угол преломления на границе «воздух – стекло», совпадающий с углом падения на границу «стекло – воздух». По закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, откуда $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) \approx 30°$.

Следовательно, $\gamma = 2\alpha - 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) \approx 30°$.

Будет полезным самостоятельно провести необходимые вычисления и получить формулу для искомого угла $\gamma = 2(\alpha - \beta)$, используя, например, теорему о внешнем угле треугольника.

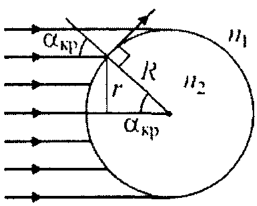
3.6.9. Снаружи от прозрачного шара вплотную к его поверхности помещен точечный источник света. При каких значениях n показателя преломления шара все выходящие из него лучи (за исключением луча, прошедшего через центр шара) будут наклонены по направлению к оси, проведенной через источник и центр шара?



Решение. Точечный источник испускает лучи света во всех направлениях. Часть этих лучей попадает внутрь шара. Из рисунка видно, что условие задачи будет выполнено, если для луча с произвольным углом падения α справедливо неравенство $\alpha > 2\beta$. Учитывая, что $\alpha \le 90°$, $2\beta \le 90°$, это неравенство можно заменить равносильным: $\sin\alpha > \sin 2\beta$. Используя закон преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$ и тригонометрическое тождество $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, преобразуем последнее неравенство к виду: $\frac{2}{n^2}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} < 1$ (для всех α). Очевидно, что это неравенство должно быть выполнено прежде всего при $\alpha \to 0$, тогда оно будет справедливо и для всех других α. Полагая $\alpha = 0$, получаем ответ: $n > 2$.

Главная трудность в этой задаче заключается в том, что вместо традиционного единственного падающего луча, на шар падают лучи света, испущенные точечным источником во всех направлениях. В связи с этим, следует обратить внимание на предложенный в решении подход – выбор произвольного луча, удовлетворяющего условию задачи. Отметим, что наибольшее значение показателя преломления шара требуется для того, чтобы отклонить к оси те из лучей, которые падают на шар под малыми углами (почти нормально).

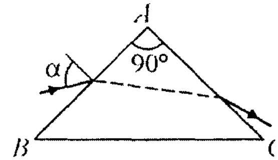
3.6.10. В стекле с показателем преломления $n_1 = 1{,}5$ имеется сферическая полость радиусом $R = 4{,}5$ см, заполненная водой. На полость падает распространяющийся в стекле широкий пучок параллельных световых лучей. Определить радиус r пучка световых лучей, которые проникают в полость. Радиус падающего пучка намного превышает радиус полости. Показатель преломления воды $n_2 = 4/3$.



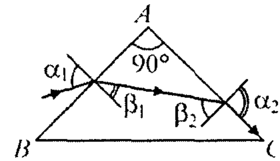
Решение. Поскольку свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_2 < n_1$), для части лучей на границе стекла и воды возникнет полное отражение. Те лучи, угол падения которых на границу раздела превышает критическое значение $\alpha_{кр} = \arcsin(n_2 / n_1)$, отразятся от границы и в полость не попадут. Следовательно, радиус пучка лучей, которые проникают внутрь полости, равен $r = R\sin\alpha_{кр}$. Отсюда $r = R\dfrac{n_2}{n_1} = 4$ см.

Следует отметить, что было бы ошибкой не учесть эффект полного отражения при переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную. Надо понимать, что именно это оптическое явление приводит к тому, что не все лучи проникают в полость. Будет полезным изобразить ход лучей, прошедших в полость и выходящих из нее. Кроме того, имеет смысл сделать аналогичный чертеж для стеклянного шара, находящегося в воде.

3.6.11. Луч света, лежащий в плоскости рисунка, падает на боковую грань AB призмы, имеющей при вершине угол $90°$. В каких пределах лежат возможные значения угла падения α, если известно, что луч выходит из боковой грани AC? Показатель преломления призмы $n = 1{,}25$.

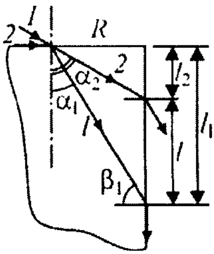


Решение. Для того чтобы луч мог выйти из задней грани призмы (грани AC), нужно, чтобы угол β_2 его падения на эту грань был меньше критического угла полного внутреннего отражения. Поскольку $\beta_1 + \beta_2 = 90°$, то $\sin\beta_2 = \cos\beta_1$. Если β_2 – критический угол ($\alpha_2 = 90°$), то $\cos\beta_1 = 1/n$. Соответствующий угол падения на переднюю грань определяется равенством: $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 = n\sqrt{1-\cos^2\beta_1} = \sqrt{n^2-1}$. Легко видеть, что если луч падает на переднюю грань призмы под меньшим углом, то на задней грани призмы произойдет его полное отражение (угол β_1 уменьшится, а угол β_2 возрастет). Наоборот, если угол падения луча на переднюю грань призмы увеличить, то угол β_1 также увеличится, а угол β_2 уменьшится, и луч выйдет из задней грани призмы. Таким образом, для того чтобы луч вышел из задней грани, угол падения его на переднюю грань должен удовлетворять условию: $\sqrt{n^2-1} < \sin\alpha < 1$, или $0{,}75 < \sin\alpha < 1$, т.е. $48°40' < \alpha < 90°$.



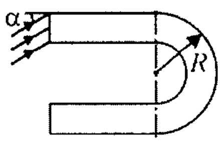
Следует обратить внимание на тот факт, что при преломлении луча на грани AC призмы свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную. В связи с этим будет ошибкой не учесть возможность его полного внутреннего отражения.

3.6.12. Снаружи круглого прозрачного стержня вблизи от центра его торца помещен точечный источник света. Найти ширину l области на боковой поверхности стержня, через которую будут выходить наружу световые лучи. Радиус стержня $R = 17$ мм, показатель преломления стержня $n = 1{,}41$.



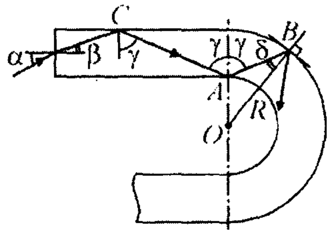
Решение. На рисунке изображены два луча, определяющие границы области на боковой поверхности стержня, из которой свет будет выходить наружу. Верхняя граница образуется лучом *2*, наиболее отклоненным от оси стержня (т.е. преломленным при касательном падении света на торец стержня). Таким образом, угол α_2 находится из условия $\sin\alpha_2 = 1/n$, и $l_2 = R\,\mathrm{ctg}\,\alpha_2 = R\sqrt{n^2-1}$. Нижняя граница определяется условием полного отражения на боковой поверхности стержня луча *1*: $\sin\beta_1 = 1/n$. Следовательно, $l_1 = R\,\mathrm{tg}\,\beta_1 = R\big/\sqrt{n^2-1}$. Учитывая, что $l = l_1 - l_2$, получаем ответ: $l = R\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \sqrt{n^2-1}\right) \approx 0{,}2$ мм.

Следует обратить внимание на то, что в этой задаче лучи света испускает точечный источник. Поэтому границы области выходящих лучей приходится определять, опираясь на такие понятия геометрической оптики, как касательное падение луча и полное внутреннее отражение.



3.6.13. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 2$ мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = \sqrt{29}/4 \approx 1{,}35$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке, где показано поперечное сечение пластинки. Радиус кривизны изогнутого участка пластинки равен $R = 1$ см. Под каким максимальным углом α_{max} может падать световой пучок на торец пластинки в плоскости рисунка, чтобы свет не выходил из пластинки через ее боковую поверхность?

Решение. Ход луча, падающего на искривленную поверхность пластинки под наименьшим углом δ, изображен на рисунке. Этот луч не выйдет наружу в точке B, если $\sin\delta \geq \frac{1}{n}$. Из треугольника AOB по теореме синусов имеем:



$\frac{\sin\delta}{|AO|} = \frac{\sin(\pi-\gamma)}{|OB|}$. Учитывая, что $|AO| = R-d$, $|OB| = R$, находим $\sin\gamma = \frac{R}{R-d}\sin\delta = \frac{R}{n(R-d)}$. Видно, что $\sin\gamma > \frac{1}{n}$, поэтому в точках A и C этот луч также наружу не выйдет. Из закона преломления следует, что $\sin\alpha = n\sin\beta$. С другой стороны, $\sin\beta = \cos\gamma$. Объединяя записанные равенства, получаем ответ:

$$\sin\alpha_{max} = \sqrt{n^2 - \frac{R^2}{(R-d)^2}} = 0{,}5,\ \alpha_{max} = 30°.$$

При решении этой задачи следует отметить, что в основе рассуждений лежит явление полного отражения, так как идущий к боковой поверхности луч находится в оптически более плотной среде. Полезно отметить, что именно явление полного внутреннего отражения широко используется в современной прикладной оптике, например при создании оптоволоконных линий связи.

3.6.14.[E] Предмет высотой $h = 6$ см расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $a = 30$ см от ее оптического центра. Оптическая сила линзы $D = 5$ дптр. Найдите высоту изображения предмета. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение. Фокусное расстояние линзы равно $F = 1/D = 0{,}2$ м $= 20$ см. Следовательно, предмет находится перед фокусом, и его изображение является действительным. Обозначим расстояние от оптического центра линзы до изображения через b и применим формулу тонкой линзы:

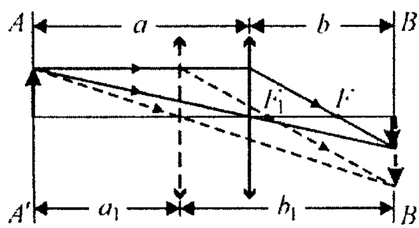
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}=D$. Кроме того, используем формулу для поперечного увеличения тонкой линзы. Поперечным увеличением Г называется отношение высоты H изображения к высоте h предмета: $\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{b}{a}$. Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$H=\frac{h}{aD-1}=0{,}12 \text{ м} = 12 \text{ см}.$$

Для решения данной задачи нужно знать формулу для поперечного увеличения тонкой линзы. Эту формулу легко вывести, построив ход лучей в тонкой собирающей линзе, которые дают изображение предмета, и затем воспользоваться подобием соответствующих треугольников.

3.6.15. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F=0{,}4$ м создает на экране увеличенное изображение предмета, который помещен на расстоянии $L=2{,}5$ м от экрана. Каково расстояние d от предмета до линзы?

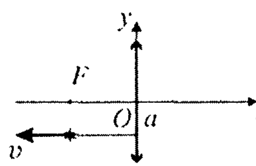
Решение. При фиксированном расстоянии между предметом и экраном, превышающем $4F$, существуют два положения линзы, при которых она даст на экране изображение предмета. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы F, симметрична относительно a и b: при замене $a_1=b$, $b_1=a$ эта формула остается справедливой. Построение изображения предмета проиллюстрировано на рисунке, где упомянутые положения линзы



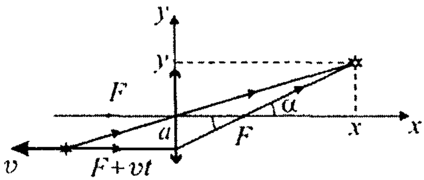
изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Видно, что если линза занимает ближнее к предмету положение, то она дает увеличенное изображение (штриховые линии), а если дальнее, то уменьшенное изображение (сплошные линии). По условию задачи $a = d$, $b = L - d$. Подставляя эти значения в формулу линзы, имеем: $\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{F}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно d, а именно: $d^2 - Ld + FL = 0$. Корни этого уравнения имеют вид: $d_{1,2} = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right)$. Условию задачи удовлетворяет меньший корень, поскольку линза дает увеличенное изображение. Тогда $d = \frac{L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right) = 0{,}5$ м.

Следует отметить, что невнимательное отношение к исходным данным может привести к ответу, не удовлетворяющему условию задачи, а именно, когда из двух корней квадратного уравнения выбирают больший по величине. Будет полезным самостоятельно убедиться, что линза дает увеличенное изображение при $d < \frac{L}{2}$.

3.6.16. Начало системы координат помещено в центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F, причем ось Ox совпадает с главной оптической осью линзы. Точечный источник света удаляется от линзы равномерно со скоростью v по прямой, параллельной оси Ox и проходящей на расстоянии a от нее. Найти координаты $x(t)$, $y(t)$ изображения источника в зависимости от времени. При $t = 0$ источник находился в фокальной плоскости линзы.

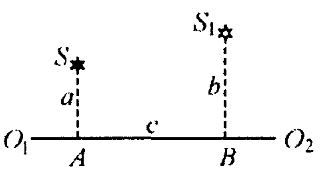


Решение. Ход лучей при построении изображения источника показан на рисунке. Видно, что изображение источника располагается на прямой, проходящей через правый фокус линзы



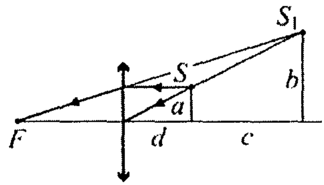
и через точку пересечения линии, по которой движется источник, с преломляющей плоскостью линзы. В начальный момент времени источник находился в фокальной плоскости линзы, и его изображение было бесконечно удалено. По мере перемещения источника в направлении от линзы его изображение приближается к линзе. Из подобных треугольников (см. рисунок) находим отношения: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{F+vt}{a}$, $\dfrac{x-F}{y}=\dfrac{F}{a}$. Выражая отсюда x и y, получаем ответ: $x(t)=F+\dfrac{F^2}{vt}$, $y(t)=\dfrac{aF}{vt}$.

Получив ответ, имеет смысл провести анализ зависимостей $x(t)$, $y(t)$ и проверить, где будет находиться изображение при $t=0$ и при $t\to\infty$. Важно также отметить, что траектория, по которой перемещается изображение – это прямая, проходящая через задний фокус линзы.



3.6.17. На рисунке представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой – прямая O_1O_2. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны, соответственно, $a=20$ см и $b=30$ см, расстояние между точками A и B равно $c=15$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

Решение. Поскольку S_1 находится по ту же сторону от главной оптической оси линзы, что и S, причем $b > a$, изображение объекта увеличенное и прямое. Такое изображение может дать только собирающая линза, причем это изображение является мнимым. Соответствующий ход лучей и найденное построением положение линзы и ее фокуса показаны на рисунке. Из подобия



треугольников следует, что $\dfrac{d}{c+d} = \dfrac{a}{b}$. Отсюда $d = \dfrac{ac}{b-a}$,

$c + d = \dfrac{bc}{b-a}$. С другой стороны, из формулы линзы, записанной

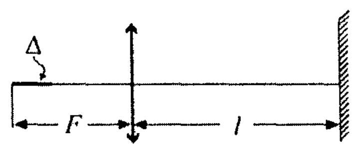
учетом того, что изображение мнимое: $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c+d} = \dfrac{1}{F}$, вытекает,

что $F = \dfrac{d(c+d)}{c}$. Объединяя записанные выражения, получаем

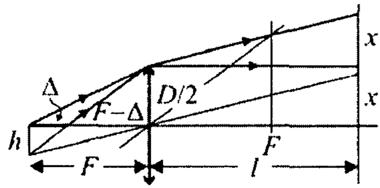
ответ: $F = \dfrac{abc}{(b-a)^2} = 90$ см.

Определенные трудности при решении этой задачи представляет геометрическое построение, дающее местоположение самой линзы и ее фокуса. Следует также отметить, что, записывая формулу тонкой линзы, нужно учесть, что изображение является мнимым, иначе ответ будет неверным. Кроме того, будет весьма полезным решить эту задачу, поменяв местами положения источника и изображения.

3.6.18. Светящаяся нить лампы в осветителе имеет форму отрезка длиной $\Delta = 1$ см и расположена вдоль главной оптической оси линзы диаметром $D = 5$ см с фокусным расстоянием $F = 9$ см таким образом, что дальний от линзы конец нити находится в фокусе линзы. Построив ход лучей, определить диаметр d светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $l = 72$ см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.

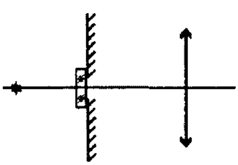


Решение. Ход лучей, испущенных двумя точками, находящимися на противоположных концах нити, изображен на рисунке. Видно, что диаметр светового пятна на экране определяется



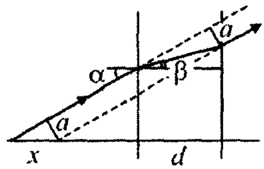
лучами, выходящими из ближнего к линзе конца нити и проходящими через край линзы. Из подобия треугольников (см. рисунок) имеем: $\frac{x}{h} = \frac{l}{F}$, $\frac{h}{\Delta} = \frac{D/2}{F-\Delta}$. Исключая из этих выражений h, находим длину отрезка $x = \frac{Dl\Delta}{2F(F-\Delta)}$. Учитывая, что $d = D + 2x$, получаем ответ: $d = D\left(1 + \frac{l\Delta}{F(F-\Delta)}\right) = 10$ см.

При решении этой задачи могут возникнуть трудности, связанные с выбором того луча, который будет определять величину светового пятна. Это связано с тем, что можно построить множество лучей, выходящих под различными углами, как из начала, так и из конца светящейся нити. Важно понимать, что размер пятна определяется диаметром линзы, а значит, *нужные* лучи будут проходить через крайние точки линзы.



3.6.19. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы на удвоенном фокусном расстоянии от нее. Между источником и линзой перпендикулярно главной оптической оси расположен непрозрачный экран с маленьким отверстием, центр которого лежит на главной оптической оси. На какое расстояние b сместится изображение источника, если отверстие в экране перекрыть плоскопараллельной стеклянной пластинкой толщиной $d = 1$ см? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см, показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Решение. В отсутствие пластинки изображение источника находится на расстоянии $2F$ от линзы. Рассмотрим один из образующих изображение источника лучей, который падает на пластинку под углом α (см. рисунок). После прохождения пластинки луч оказывается смещенным параллельно самому себе на расстояние $a = d\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$, где β – угол преломления. Поскольку углы падения и преломления малы, $\beta \approx \dfrac{\alpha}{n}$, $\cos\beta \approx 1$, и $a \approx \alpha d\dfrac{n-1}{n}$. Смещение луча на расстояние a эквивалентно смещению источника вдоль оптической оси в сторону линзы на расстояние $x = \dfrac{a}{\sin\alpha} \approx \dfrac{a}{\alpha} = d \cdot \dfrac{n-1}{n}$ (см. рисунок). Применяя формулу тонкой линзы $\dfrac{1}{2F - x} + \dfrac{1}{2F + b} = \dfrac{1}{F}$, после несложных преобразований получаем ответ: $b = \dfrac{Fd(n-1)}{nF - d(n-1)} \approx 0{,}34$ см.

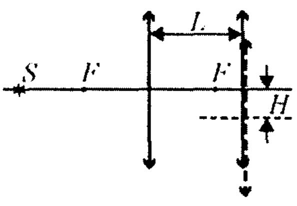


При решении этой задачи следует отметить, что условие малости отверстия в экране подразумевает тот факт, что углы падения на пластинку лучей, идущих от источника, также малы. Это существенным образом облегчает решение задачи. Кроме того, весьма полезно обратить внимание на важный момент в решении, а именно, что смещение луча эквивалентно смещению источника вдоль оси. В связи с этим рекомендуется обдумать, при каких условиях смещение источника будет происходить в противоположную сторону.

3.6.20. Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии $d = 20$ см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на расстояние $\delta = 2{,}2$ мм. Определить оптическую силу D контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза – это тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 2$ см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

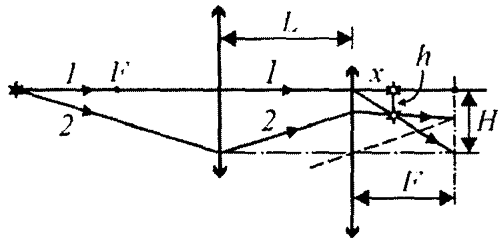
Решение. Обозначим через b расстояние от хрусталика до сетчатки глаза. Учитывая, что оптическая сила системы «глаз + контактная линза» равна $\frac{1}{F} + D$, по формуле тонкой линзы имеем: $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} + D$. Поскольку расстояние от хрусталика до изображения предмета в отсутствие контактной линзы равно $b + \delta$, формула тонкой линзы для этого случая имеет вид: $\frac{1}{d} + \frac{1}{b+\delta} = \frac{1}{F}$. Исключая из этих соотношений b, получаем ответ: $D = \frac{\delta(d-F)^2}{dF(dF + F\delta - d\delta)} \approx 5$ дптр.

Чтобы избежать ошибки при решении этой задачи, необходимо понимать, что формирование изображения глазом, имеющим дефект дальнозоркости, происходит не на сетчатке, а несколько дальше. Наличие контактной линзы (в данном случае собирающей) устраняет этот недостаток.



3.6.21. Оптическая система состоит из двух одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием $F = 2{,}5$ см каждая. Линзы расположены на расстоянии $L = 3{,}5$ см друг от друга ($F < L < 2F$) так, что их главные оптические оси совпадают. Слева от системы на расстоянии $2F$ от левой линзы находится точечный источник света S. На какое расстояние h сместится изображение источника, даваемое этой системой, если правую линзу сдвинуть перпендикулярно ее оптической оси на расстояние $H = 1$ см?

Решение. Построение изображения для случая, когда правая линза смещена, приведено на рисунке. Для построения использованы два луча, идущие от источника: луч *1*, совпадающий с главной оптической осью левой линзы, и луч *2*, проведенный в точку

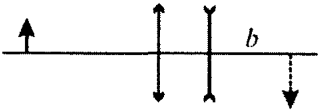


пересечения преломляющей плоскости левой линзы с главной оптической осью правой линзы. Из рисунка видно, что на основании подобия треугольников $h = Hx / F$. При вычислении величины x учтем, что изображение источника, даваемое левой линзой, находится на ее главной оптической оси на расстоянии $2F - L$ от правой линзы справа от нее. Используя для правой линзы формулу: $-\dfrac{1}{2F-L}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{F}$, находим, что $x = F\dfrac{2F-L}{3F-L}$.

Отсюда $h = H\dfrac{2F-L}{3F-L} = 3{,}75$ мм.

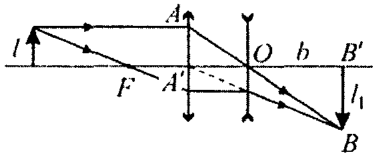
Основная трудность этой задачи заключается в том, что вместо традиционного смещения линз вдоль оптической оси, происходит перемещение линзы в перпендикулярном к оси направлении. В связи с этим не следует забывать, что при перемещении линзы в этом направлении произойдет перемещение ее оптического центра и главной оптической оси.

Кроме того, надо понимать, что изображение источника, формируемое первой линзой, находится правее второй линзы. Это обстоятельство следует учесть для правильной записи формулы тонкой линзы.



3.6.22. Собирающая и рассеивающая линзы с одинаковыми по величине фокусными расстояниями $F = 20$ см расположены на расстоянии F друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет находится на некотором расстоянии от собирающей линзы. Чему равно увеличение системы Γ, т.е. отношение размера изображения к размеру предмета, если известно, что действительное изображение предмета, показанное на рисунке штриховой линией, находится на расстоянии $b = 30$ см от рассеивающей линзы?

Решение. Ход лучей при построении изображения предмета показан на рисунке. Из подобия треугольников $AA'O$ и $OB'B$



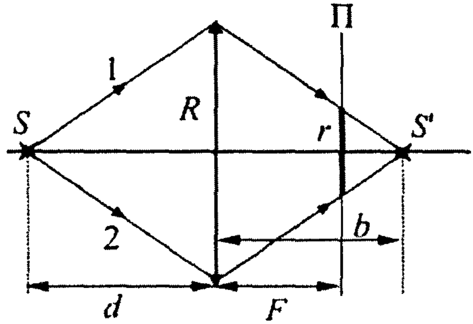
следует, что $\dfrac{l_1}{b} = \dfrac{l}{F}$. С другой стороны, увеличение системы $\Gamma = \dfrac{l_1}{l}$. Объединяя эти выражения, получаем ответ: $\Gamma = \dfrac{b}{F} = 1{,}5$.

Для решения этой задачи очень важно провести правильное построение хода лучей от источника до изображения. В связи с этим будет весьма полезным решить эту задачу, расположив рассеивающую линзу на расстоянии $2F$ от собирающей, или поменять линзы местами.

3.6.23.[E] Условимся считать изображение на пленке фотоаппарата резким, если вместо идеального изображения в виде точки на пленке получается изображение пятна диаметром не более некоторого предельного значения. Поэтому, если объектив находится на фокусном расстоянии от пленки, то резкими считаются не только бесконечно удаленные предметы, но и все предметы, находящиеся дальше некоторого расстояния d. Оцените предельный размер пятна, если при фокусном расстоянии объектива

$F = 50$ мм и диаметре входного отверстия $D = 5$ мм резкими оказались все предметы, находившиеся на расстояниях более чем $d = 5$ м от объектива. Сделайте рисунок, поясняющий образование пятна.

Решение. На рисунке изображена оптическая схема, поясняющая образование пятна на пленке. Для того чтобы понять,

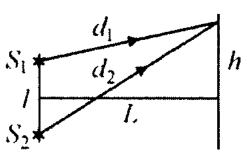


как получается это пятно, рассмотрим два крайних луча 1 и 2, которые идут от точечного источника света S и проходят через края входного отверстия объектива. Эти лучи преломляются линзой и пересекаются в точке S', находящейся за фокальной плоскостью линзы, то есть за пленкой П. В результате на пленке образуется пятно, показанное на рисунке более толстой линией. Из рисунка видно, что если приближать источник к линзе, то изображение S' будет отодвигаться дальше за пленку, и диаметр пятна на ней будет увеличиваться. Если же удалять источник от линзы, то изображение S' будет приближаться к пленке. В предельном случае, когда источник света окажется удаленным на бесконечно большое расстояние от линзы, исходящий из него пучок световых лучей можно будет считать параллельным. В результате изображение S' будет расположено в фокусе линзы, то есть на пленке получится не пятно, а точка.

Пусть источник света находится на расстоянии d от линзы, и при этом на пленке получается пятно радиусом r. Обозначим расстояние от линзы до изображения S' через b. Тогда, как следует из формулы тонкой линзы: $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$. Кроме того, из подобия треугольников получаем: $\frac{R}{b}=\frac{r}{b-F}$, где $R=D/2$ – радиус входного отверстия объектива. Решая записанные уравнения, находим: $r=\frac{RF}{d}$. Отсюда искомый диаметр пятна на пленке $L=2r=\frac{2RF}{d}=\frac{DF}{d}$. Из полученной формулы видно, что при уменьшении расстояния d диаметр L пятна на пленке увеличивается. Поэтому минимальному расстоянию $d=5$ м от точечного источника до объектива соответствует максимальный размер пятна на пленке $L=\frac{5\text{ мм}\cdot 50\text{ мм}}{5000\text{ мм}}=0{,}05$ мм = 50 мкм.

Для решения этой задачи необходимо понимать, как формируется изображение в простейшем фотоаппарате, и иметь представление о том, что такое «глубина резкости». Следует отметить, что для реальной фотографической пленки минимальное расстояние d (то есть глубина резкости) определяется размером частиц нанесенной на пленку фотоэмульсии. Найденная величина L дает оценку для диаметра таких частиц.

3.6.24. Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический свет с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм. Определить, на каком расстоянии h от точки, расположенной на экране на равном расстоянии от источников, будет находиться первый максимум освещенности. Экран удален от источников на расстояние $L=3$ м, расстояние между источниками $l=0{,}5$ мм.



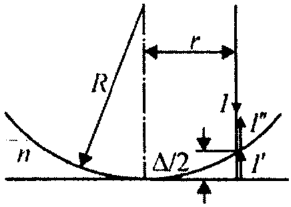
Решение. Максимумы освещенности образуются в тех точках на экране, в которых световые волны, пришедшие от источников, оказываются в фазе. Условия максимумов интерференционной картины имеют вид: $d_2-d_1=m\lambda$, где d_1 и d_2 – расстояния от источников до данной точки на экране (см. рисунок), m – целое число (порядок интерференционного максимума). Для волн, дающих первый максимум, $m=1$. Из рисунка видно, что $d_1^2 = L^2 + \left(h - \frac{l}{2}\right)^2$, $d_2^2 = L^2 + \left(h + \frac{l}{2}\right)^2$. Отсюда $d_2^2 - d_1^2 = 2hl$. Преобразуем это равенство к виду: $(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2hl$. Учитывая, что $l << L$, $h << L$, можно приближенно положить $d_1 + d_2 \approx 2L$. Тогда $d_2 - d_1 \approx hl/L$. Объединяя это равенство с записанным выше условием максимума первого порядка, получаем ответ:

$$h \approx \lambda \frac{L}{l} = 3{,}6 \text{ мм.}$$

При решении этой задачи надо понимать, что при таком расположении источников и экрана на нем будет наблюдаться интерференционная картина, представляющая собой систему интерференционных полос. В связи с этим имеет смысл, вычислив, на каком расстоянии будет находиться второй максимум освещенности, определить ширину интерференционной полосы.

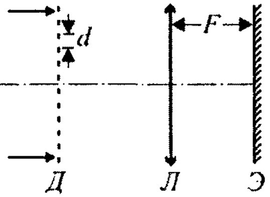
Следует также обратить внимание на конкретные числовые данные из условия задачи, а именно $l = 0{,}5$ мм, $L = 3$ м. Благодаря соотношению между этими величинами появляется возможность записать приближенное равенство $d_1 + d_2 \approx 2L$ и упростить последующий расчет.

3.6.25. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плоско-выпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный $n = 1{,}5$. Свет падает по нормали к пластинке.

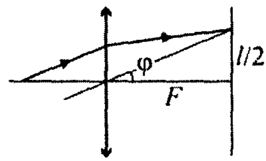


Решение. Обозначим через Δ геометрическую разность хода двух лучей, идущих на расстоянии r от главной оптической оси линзы: луча $1'$, отраженного от верхней поверхности стеклянной пластинки, и луча $1''$, отраженного от нижней поверхности линзы. По теореме Пифагора имеем: $R^2 = r^2 + (R - \Delta/2)^2$. Отсюда $R\Delta = r^2 + \Delta^2/4$. Учитывая, что $\Delta^2/4 << r^2$, приближенно получаем $\Delta \approx \frac{r^2}{R}$. Поскольку волны 1 и $1'$ распространяются в бензоле, заполняющем зазор между линзой и пластинкой, оптическая разность хода между волнами $1'$ и $1''$ равна $\Delta_{\text{опт}} = n\Delta = \frac{nr^2}{R}$. Дополнительный фазовый набег, равный π, волна $1'$ приобретает при отражении волны 1 от оптически более плотной среды. Таким образом, условие первого интерференционного минимума имеет вид: $\Delta_{\text{опт}} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм.

При решении подобных задач следует обратить внимание на два важных момента. Во-первых, не стоит забывать, что в случае распространения волн в среде с показателем преломления n под Δ надо понимать *оптическую* разность хода интерферирующих волн. Во-вторых, важно помнить, что при отражении волны от оптически более плотной среды возникает дополнительный набег фазы, равный π.



3.6.26. С помощью установки, схема которой показана на рисунке, наблюдают дифракцию параллельного пучка белого света на дифракционной решетке *Д*, расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране *Э*, установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы *Л*, видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 460$ нм и $\lambda_2 = 575$ нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найдите минимальный период решетки $d_{\min}$, при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.



Решение. Углы, определяющие направления на дифракционные максимумы, задаются условием $d\sin\varphi = m\lambda$, где m – порядок интерференционного максимума ($m = 0, 1, 2, \cdots$). Наложение спектральных компонент с длинами волн λ_1 и λ_2 происходит, если $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$. Анализ числовых данных показывает, что минимальные значения m_1 и m_2, при которых выполняется это условие, равны: $m_1 = 5$, $m_2 = 4$. Следовательно, $d = \dfrac{m_1\lambda_1}{\sin\varphi} = \dfrac{m_2\lambda_2}{\sin\varphi}$. Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{2} = F\,\mathrm{tg}\,\varphi$, откуда $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{l}{2F}$. Используя формулу $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$, получаем ответ:

$$d = 5\lambda_1\sqrt{1+\left(\frac{2F}{l}\right)^2} \approx 3{,}8 \text{ мкм}.$$

При решении этой задачи следует обратить внимание на то, что для выполнения условия $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$ значения m_1 и m_2 получаются методом подбора. Кроме того, будет весьма полезным схематически изобразить углы, определяющие направления на дифракционные максимумы (от первого до пятого) для спектральных компонент с длинами волн λ_1 и λ_2.

Задачи для самостоятельного решения

3.6.27. Пассажир автобуса, едущего вдоль прямого канала с водой, наблюдает за световым бликом, который отбрасывается спокойной поверхностью воды от фонаря, стоящего на противоположном берегу канала. Найдите модуль u скорости движения блика по поверхности воды относительно берегов канала, если высота фонаря над поверхностью воды $H = 6$ м, высота глаз пассажира над поверхностью воды $h = 4$ м, скорость автобуса $v = 72$ км/ч.

Ответ: $u = \dfrac{vH}{h+H} = 12$ м/с.

3.6.28. На плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы, сферическая поверхность которой имеет радиус $R = 86$ см и посеребрена, падает узкий пучок света параллельно главной оптической оси на расстоянии $d = 5$ см от нее. Пучок выходит из линзы после однократного отражения от ее сферической поверхности. Найти, под каким углом α к оси пучок выходит из линзы. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, равен $n = 1{,}5$.

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{2dn}{R}\sqrt{1-\dfrac{d^2}{R^2}}\right) \approx 10°$.

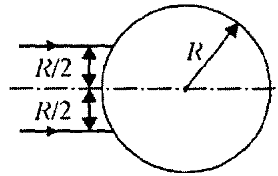
3.6.29. На зеркальный шар падает узкий параллельный пучок света, ось которого проходит через центр шара. Диаметр отраженного от шара пучка, измеренный на расстоянии $l = 12$ см от центра шара, оказался в $m = 2$ раза больше диаметра падающего пучка. Найти радиус шара R. Углы падения и отражения световых лучей считать малыми.

Ответ: $R = \dfrac{2l}{m+1} = 8$ см.

3.6.30. Луч света отражается от плоского зеркала, падая на него под углом $\alpha = 30°$. На какое расстояние l сместится отраженный от зеркала луч, если поверхность зеркала закрыть стеклянной пластинкой толщиной $d = 3$ см? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Ответ: $l = d\sin 2\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \right) \approx 1{,}16$ см.

3.6.31. Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу R круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Найти величину показателя преломления n материала цилиндра, при которой преломленные лучи пересекаются на его поверхности.



Ответ: $n = \dfrac{1}{2\sin 15°} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 1{,}93$.

3.6.32. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара под углом $\alpha = 45°$. Найти показатель преломления стекла n, если угол между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара, $\gamma = 30°$.

Ответ: $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - (\gamma/2))} = \sqrt{2}$.

3.6.33. На поверхность стеклянного шара с показателем преломления $n = 1{,}5$ падает узкий пучок света, образуя малый угол $\alpha = 0{,}06$ рад с осью шара, проведенной через точку падения и центр шара. Под каким углом γ к этой оси пучок выйдет из шара? При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

Ответ: $\gamma = \alpha\dfrac{2-n}{n} = 0{,}02$ рад, решение существует при $n < 2$.

3.6.34.[E] В дно водоема глубиной $H = 3$ м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи $h = 2$ м. Свая отбрасывает на дне водоема тень длиной $L = 0{,}75$ м. Определите угол падения солнечных лучей на поверхность воды. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Ответ: $\alpha = \arcsin\dfrac{nL}{\sqrt{h^2 + L^2}} = \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{73}} \approx \arcsin 0{,}47 \approx 28^\circ.$

3.6.35. Рыбаку, стоящему на прозрачном льду озера, кажется, что дно находится на глубине $L = 2{,}5$ м от поверхности льда. Найти действительную глубину озера H, если толщина льда $h = 65$ см, показатель преломления льда $n_л = 1{,}31$, воды – $n_в = 1{,}33$. Рыбак смотрит на лед вертикально вниз.

Ответ: $H = Ln_в + h\left(1 - \dfrac{n_в}{n_л}\right) \approx 3{,}3$ м.

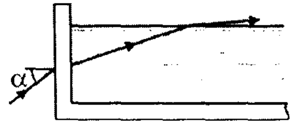
3.6.36. Линейка с сантиметровыми делениями погружена вертикально в сосуд с прозрачной жидкостью. Нижний конец линейки совпадает с делением «0». Граница жидкости совпадает с делением «10». Глаз наблюдателя расположен на расстоянии 25 см от линейки на высоте 10 см от поверхности жидкости. Наблюдатель видит совмещенными изображение нижней части линейки, погруженной в жидкость, и отражение верхней части линейки. При этом изображение нижнего конца линейки совпадает с меткой «15» отражения верхней части. Чему равен показатель преломления жидкости?

Ответ: $n = 1{,}34$.

3.6.37. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом $R = 1$ м, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $H_{\max} = Rn = 1{,}33$ м.

3.6.38. Луч света, идущий в плоскости рисунка, падает наклонно на вертикальную стенку прозрачной кюветы, заполненной жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}25$. В каких пределах должен лежать угол падения α, чтобы луч мог выйти из жидкости, как показано на рисунке?

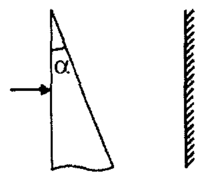


Ответ: $\sin\alpha \geq \sqrt{n^2 - 1} = 0{,}75$, $\alpha \geq 48{,}6\,°$.

3.6.39. Торец круглого прозрачного стержня с показателем преломления $n = 1{,}4$ освещается рассеянным светом. Под каким максимальным углом γ к оси стержня выходят световые лучи через его боковую поверхность?

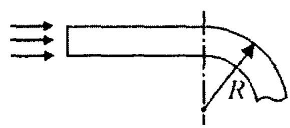
Ответ: $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{n^2 - 1} \approx 11{,}5\,°$.

3.6.40. На стеклянный клин перпендикулярно его передней грани падает тонкий луч света. Показатель преломления стекла $n = 1{,}41$, угол при вершине клина $\alpha = 10°$. Построив ход преломленных и отраженных от граней клина лучей, определить число m светлых пятен, которые будут видны на экране, поставленном за клином.



Ответ: $m = 2$.

3.6.41. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 1$ мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = 1{,}5$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке, где показано поперечное сечение пластинки. Перпендикулярно торцу пластинки на него падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Определить минимально допустимый радиус кривизны $R_{\min}$ изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определять по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.



Ответ: $R_{\min} = \dfrac{nd}{n-1} = 3$ мм.

3.6.42. Диск радиусом $R = 5$ см изо льда с показателем преломления $n = 1{,}3$ разрезали перпендикулярно его плоскости по диаметру. Перпендикулярно плоскости разреза на одну из половин диска направили узкий параллельный пучок света, который вышел параллельно падающему пучку на некотором расстоянии L от него. Найти расстояние L, если интенсивности падающего и выходящего пучков почти одинаковы.

Ответ: $L(k) = 2R\sin\left(\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\dfrac{\pi}{2}\right) = 10\sin\left(\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\dfrac{\pi}{2}\right)$ см , где $k = 3, 4, \ldots$.

3.6.43. На боковую грань стеклянного куба, стоящего на столе, села муха. При каком показателе преломления стекла муха не видна через верхнюю грань куба?

Ответ: $n > \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

3.6.44.[E] Изображение предмета, расположенного на расстоянии 40 см от рассеивающей линзы, наблюдается на расстоянии 24 см от линзы. Найдите модуль фокусного расстояния рассеивающей линзы. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: $|F| = 60$ см.

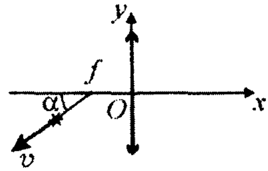
3.6.45. С помощью тонкой собирающей линзы на экране, установленном перпендикулярно оптической оси, получают изображение светящегося диска, также перпендикулярного этой же оси. Диаметр изображения в $n = 8$ раз меньше, чем сам диск. Когда линзу отодвинули от экрана на $\Delta l = 28$ см, то на экране снова получилось резкое изображение диска. Определить фокусное расстояние F линзы.

Ответ: $F = \dfrac{n\Delta l}{n^2 - 1} \approx 3{,}56$ см.

3.6.46.[E] На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением ($\Gamma = 5$). Экран передвинули на $\Delta f = 30$ см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением ($\Gamma_1 = 3$). На каком расстоянии f от линзы находилось изображение предмета в первом случае?

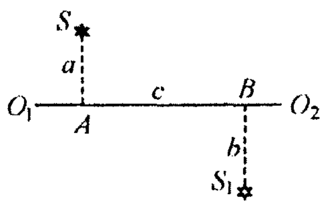
Ответ: $f = \dfrac{\Delta f(1+\Gamma)}{\Gamma - \Gamma_1} = 90$ см.

3.6.47. Начало системы координат помещено в центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f, причем ось Ox совпадает с главной оптической осью линзы. Точечный источник света удаляется от линзы с постоянной скоростью v по прямой, проходящей через фокус линзы под углом α к оптической оси. Найти координаты $x(t)$, $y(t)$ изображения источника в зависимости от времени. При $t = 0$ источник находился в фокусе линзы.

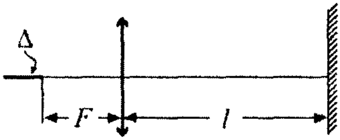


Ответ: $x(t) = f + \dfrac{f^2}{vt\cos\alpha}$, $y(t) = f\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

3.6.48. На рисунке представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой – прямая O_1O_2. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны, соответственно, $a = 10$ см и $b = 20$ см, расстояние между точками A и B равно $c = 40$ см. Найти фокусное расстояние линзы.



Ответ: $F = \dfrac{abc}{(a+b)^2} \approx 8{,}9$ см.



3.6.49. Светящаяся нить лампы имеет форму отрезка длиной $\Delta = 1$ см и расположена вдоль главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 5$ см так, что ближний к линзе конец нити находится в ее фокусе. На расстоянии l от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси расположен экран. Построив ход лучей, определить, при каком значении l размер пятна на экране превысит диаметр линзы.

Ответ: $l > 2F\left(1 + \dfrac{F}{\Delta}\right) = 60$ см.

3.6.50. Квадрат со стороной $a = 0{,}5$ см расположен перед линзой с фокусным расстоянием $F = 10$ см так, что одна пара его сторон перпендикулярна, а другая – параллельна главной оптической оси линзы, причем эта ось проходит через центр квадрата. Расстояние от ближайшей стороны квадрата до линзы равно $b = 30$ см. Найти площадь изображения квадрата.

Ответ: $s = \dfrac{a^2F^3(a + 2b - 2F)}{2(b - F)^2(a + b - F)^2} \approx 3$ см^2.

3.6.51. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы на расстоянии $L = 1$ м от нее находится точечный источник, излучающий свет в пределах узкого конуса с углом при вершине $2\alpha = 0{,}1$ рад. Ось этого конуса совпадает с главной оптической осью рассеивающей линзы. За линзой на расстоянии L от нее расположен плоский экран, параллельный линзе. Найти радиус светлого пятна на экране, если оптическая сила линзы $D = -1$ дптр, и весь свет от источника проходит через линзу.

Ответ: $R = L|D| \cdot \left(L + \dfrac{2}{|D|}\right) \operatorname{tg}\alpha \approx 15$ см.

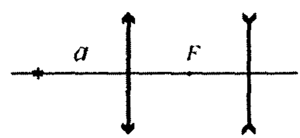
3.6.52. С помощью тонкой линзы получено изображение S_1 светящейся точки S. Точка и ее изображение находятся по одну сторону от линзы. Точка располагается на расстоянии $H = 2{,}25$ см от оптической оси линзы, а ее изображение – на расстоянии $H/3$ от этой оси. Расстояние между точкой и ее изображением равно $L = 25$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

Ответ: $F = -\dfrac{3}{4}\sqrt{L^2 - \dfrac{4H^2}{9}} \approx -18{,}7$ см.

3.6.53. Человек, страдающий близорукостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии $d = 202$ см перед его глазами, с использованием контактной линзы оптической силой $D = -5$ дптр. При этом изображение предмета оказывается точно в плоскости сетчатки глаза. Определить, на какое расстояние δ сместится плоскость изображения, если человек снимет контактные линзы. Считать, что оптическая система глаза – это тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 2$ см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

Ответ: $\delta = \dfrac{Fd}{d - |D|Fd - f} - \dfrac{Fd}{d - F} \approx 2{,}2$ мм; изображение смещено в сторону хрусталика.

3.6.54. Собирающая и рассеивающая линзы имеют одинаковые по величине фокусные расстояния $F = 10$ см и расположены так, что задний фокус собирающей линзы совмещен с передним фокусом рассеивающей. На каком расстоянии a от собирающей линзы следует поместить точечный источник света, чтобы после рассеивающей линзы получить пучок параллельных лучей?



Ответ: $a = \dfrac{3}{2}F = 15$ см.

3.6.55. Две одинаковые тонкие собирающие линзы, прижатые вплотную друг к другу, дают на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma = 3$. Расстояние между предметом и экраном $L = 80$ см. Какова оптическая сила D_0 каждой из линз?

Ответ: $D_0 = \dfrac{(\Gamma+1)^2}{2\Gamma L} \approx 3{,}3$ дптр.

3.6.56. Чтобы лучше рассмотреть мелкие детали рисунка, человек берет лупу. Поднося ее к рисунку, он увидел на нем резкое изображение нити лампочки, висящей над столом под потолком комнаты, когда расстояние между лупой и рисунком стало равным $b = 5$ см. Поднеся лупу к глазу, человек рассматривает рисунок. Найти увеличение изображения рисунка, если оно находится на расстоянии наилучшего зрения $D = 25$ см.

Ответ: $\Gamma \approx 1 + \dfrac{D}{b} = 6$.

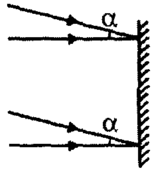
3.6.57.$^{\text{Е}}$ Объектив проекционного аппарата имеет оптическую силу $D = 5{,}4$ дптр. Экран расположен на расстоянии $b = 4$ м от объектива. Определите размеры экрана, на котором должно уместиться изображение диапозитива размером $h_1 \times h_2 = 6 \times 9$ см^2.

Ответ: $H_{1,2} = h_{1,2}(Db - 1)$, $H_1 = 123{,}6$ см, $H_2 = 185{,}4$ см.

3.6.58. Киноаппаратом со скоростью $f = 24$ кадра в секунду снимают колебания математического маятника. Одно полное колебание занимает $N = 48$ кадров. Длина маятника на плёнке $l = 10$ мм, фокусное расстояние объектива $F = 70$ мм. С какого расстояния L снимали маятник? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $L = \dfrac{gFN^2}{4\pi^2 f^2 l} \approx 7{,}1$ м.

3.6.59. Два когерентных световых пучка падают на экран: один пучок по нормали, а другой – под углом $\alpha = 0{,}01$ рад. Найти период d интерференционной картины, т.е. расстояние между соседними светлыми полосами на экране, если длина световой волны в обоих пучках равна $\lambda = 0{,}5$ мкм.

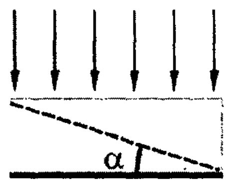


Ответ: $d = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha} \approx \dfrac{\lambda}{\alpha} = 50$ мкм.

3.6.60. На стеклянную пластинку нанесен тонкий слой прозрачного покрытия, показатель преломления которого $n = 1{,}41$ меньше показателя преломления стекла. На пластинку под углом $\alpha = 30°$ падает пучок белого света. Какова минимальная толщина покрытия $d_{\min}$, при которой в отраженном свете оно кажется зеленым? Длина волны зеленого света $\lambda = 0{,}53$ мкм.

Ответ: $d_{\min} = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 0{,}2$ мкм.

3.6.61. Покрытое толстым однородным слоем эмульсии зеркало осветили нормально падающим монохроматическим параллельным пучком света. После проявления сделали срез эмульсии под углом $\alpha = 10^{-3}$ рад к плоскости зеркала. Найти длину волны использованного света, если на срезе под микроскопом наблюдаются полосы с периодом $b = 0{,}3$ мм. Усадкой эмульсии при обработке пренебречь, показатель преломления эмульсии близок к 1.



Ответ: $\lambda = 2b\sin\alpha \approx 2b\alpha = 0{,}6$ мкм.

3.6.62.[E] Выполняя экспериментальное задание, ученик должен был определить период d дифракционной решетки. С этой целью он направил световой пучок на дифракционную решетку через красный светофильтр, который пропускает свет длиной волны $\lambda = 0{,}76$ мкм. Дифракционная решетка находилась от экрана на расстоянии $L = 1$ м. На экране расстояние между спектрами первого порядка получилось равным $l = 15{,}2$ см. Какое значение периода дифракционной решетки было получено учеником? Ответ выразите в микрометрах (мкм). При малых углах $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$.

Ответ: $d \approx \dfrac{2L\lambda}{l} \approx 10$ мкм.

3.6.63.[E] На дифракционную решетку с периодом $d = 0{,}01$ мм нормально к поверхности решетки падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. За решеткой, параллельно ее плоскости, расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Чему равно расстояние между максимумами первого и второго порядков на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы?

Ответ: $\Delta x \approx \dfrac{F\lambda}{d} = 3$ мм.

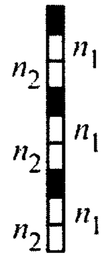
3.6.64.[E] Дифракционная решетка с периодом $d = 10^{-5}$ м расположена параллельно экрану на расстоянии $L = 1{,}8$ м от него. Максимум какого порядка k будет наблюдаться в спектре на экране на расстоянии $l = 21$ см от центра дифракционной картины при освещении решетки нормально падающим параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 580$ нм? Считать $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $k \approx \dfrac{dl}{\lambda L} \approx 2$.

3.6.65.[E] На дифракционную решетку, имеющую период $d = 2 \cdot 10^{-5}$ м, падает нормально параллельный пучок белого света. Спектр наблюдается на экране на расстоянии $L = 2$ м от решетки. Каково расстояние между красным и фиолетовым участками спектра первого порядка (первой цветной полоски на экране), если длины волн красного и фиолетового света соответственно равны $\lambda_{кр} = 8 \cdot 10^{-7}$ м и $\lambda_ф = 4 \cdot 10^{-7}$ м? Считать $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$. Ответ выразите в см.

Ответ: $l = \dfrac{L}{d}(\lambda_{кр} - \lambda_ф) = 4$ см.

3.6.66. Из стеклянных пластинок трех видов: не пропускающих свет (зачерненных), и прозрачных, имеющих показатели преломления $n_1 = 1{,}5$ и $n_2 = 1{,}55$, изготовлена дифракционная решетка. Эти пластинки имеют одинаковые размеры и чередуются так, как показано на рисунке. На эту решетку нормально падает монохроматический параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. За решеткой параллельно ей расположена собирающая тонкая линза. В фокальной плоскости линзы находится экран, перпендикулярный главной оптической оси линзы. На экране наблюдается дифракционная картина. При какой толщине h пластинок не будет наблюдаться свет в главном фокусе линзы?



Ответ: $h = \dfrac{(2k+1)\lambda}{2\,|\,n_2 - n_1\,|} = (2k+1)\cdot 5$ мкм, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

4.1. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

Примеры решения задач и методические рекомендации

4.1.1.[E] Электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ м используется для нагревания воды. Какую массу воды можно нагреть за время $t = 700$ с на $\Delta T = 10$ °C, если источник излучает $N = 10^{20}$ фотонов за 1 с? Считать, что излучение полностью поглощается водой.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой, связывающей энергию фотона с его частотой. Энергия одного фотона, идущая на нагревание воды, равна $E_0 = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. Всего за время t вода поглотит энергию $E = E_0 N t = h\dfrac{c}{\lambda}Nt$. Уравнение теплового баланса в данном случае имеет вид: $h\dfrac{c}{\lambda}Nt = C_{в} m \Delta T$, где $C_{в} = 4200$ Дж/(кг·К) – удельная теплоемкость воды. Таким образом, масса нагретой воды равна $m = \dfrac{hcNt}{\lambda C_{в} \Delta T}$. Подставляя числа и проверяя размерность, получаем ответ:

$$m = \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}) \cdot (10^{20}\ \text{с}^{-1}) \cdot (700\ \text{с})}{(3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{м}) \cdot \left(4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^{\circ}\text{C}}\right) \cdot 10\ {}^{\circ}\text{C}} \approx 1\ \text{кг}.$$

При решении данной задачи нужно помнить о том, что заданная в условии величина N является размерной (ее размерность $[\text{с}^{-1}]$).

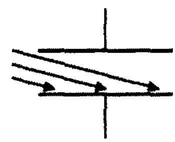
4.1.2. Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}35$ мкм. Какая энергия E передана выбитым из катода электронам, если в цепи фотоэлемента протек заряд $q = 2 \cdot 10^{-12}$ Кл? Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

Решение. Величина протекшего в цепи заряда равна $q = en$, где n – число выбитых из катода электронов. Отсюда $n = q/e$. Энергия одного светового кванта с длиной волны λ равна $E_0 = hc/\lambda$. Следовательно, электронам передана энергия $E = nE_0 = nhc/\lambda$. Отсюда $E = \dfrac{qhc}{\lambda e}$. Подставляя числа и проверяя размерность, находим ответ:

$$E = \frac{(2 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}) \cdot (6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})}{(0{,}35 \cdot 10^{-6}\ \text{м}) \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}.$$

При решении подобных задач часто возникает путаница с такими величинами, как энергия одного светового кванта и энергия покинувшего катод электрона. Важно понимать, что hc/λ – это энергия одного фотона, падающего на поверхность металла.

4.1.3. Какой максимальный заряд q может быть накоплен на конденсаторе емкостью $C = 2 \cdot 10^{-11}$ Ф, одна из обкладок которого облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм? Работа выхода электрона $A = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.



Решение. Покидающие облучаемую обкладку конденсатора электроны уносят с нее отрицательный заряд, в результате чего эта обкладка заряжается положительно, а противоположная – отрицательно. Между обкладками возникает разность потенциалов $U = q/C$, где q – величина заряда на каждой из обкладок. Электрическое поле конденсатора стремится вернуть электроны на положительно заряженную обкладку. Если потенциальная энергия электронов eU в окрестности отрицательно заряженной обкладки станет равной их начальной кинетической энергии, то все электроны, покидающие облучаемую обкладку, будут возвращаться на нее, и зарядка конденсатора прекратится. Таким образом, условие достижения максимального напряжения между обкладками имеет вид: $\frac{mv^2}{2} = eU$. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия светового кванта расходуется на преодоление работы выхода и на сообщение выбитому из обкладки электрону кинетической энергии: $\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2}$, откуда $\frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv^2}{2}$, или $\frac{hc}{\lambda} - A = e\frac{q}{C}$.

Тогда $q = \frac{C}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) \approx 1{,}2 \cdot 10^{-11}$ Кл. Подстановка чисел и проверка размерности дает ответ:

$$q = \frac{2 \cdot 10^{-11}\ \text{Ф}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}\left(\frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}) \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})}{0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}} - (3 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж})\right) \approx$$

$$\approx 1{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{Кл}.$$

При решении этой задачи могут возникнуть затруднения с пониманием физической причины прекращения зарядки конденсатора. В этой связи имеет смысл провести аналогию с телом, брошенным вертикально вверх и прилипающим к потолку: если начальная кинетическая энергия тела недостаточна для достижения требуемой высоты, то тело возвращается в исходную точку.

4.1.4. Уединенный изолированный металлический шарик радиусом $r = 0{,}5$ см, находящийся в вакууме, освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм, которая меньше, чем длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для данного металла. Каково максимальное количество электронов n_{max}, которые могут покинуть шарик после того, как его дополнительно осветят излучением с длиной волны

$\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Пусть при облучении шарика светом с длиной волны λ_1 его покинуло n_1 электронов, и шарик приобрел заряд $q_1 = en_1$. Изменение потенциальной энергии электрона при перемещении его с поверхности шарика в бесконечно удаленную точку равно $\Delta E_\text{п} = \dfrac{e^2 n_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Все электроны, покинувшие шарик, возвращаются на него, если их кинетическая энергия $\dfrac{mv^2}{2} \le \Delta E_\text{п}$. Из уравнения Эйнштейна следует, что $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{hc}{\lambda} - A$. Объединяя записанные выражения, получим максимальное число электронов, которые могут покинуть шарик при облучении его светом с длиной волны λ_1: $n_{1\max} = \left(\dfrac{hc}{\lambda_1} - A\right)\dfrac{4\pi\varepsilon_0 r}{e^2}$. Рассуждая так же, найдем максимальное число электронов, которые могут покинуть шарик при облучении его светом с длиной волны λ_2: $n_{2\max} = \left(\dfrac{hc}{\lambda_2} - A\right)\dfrac{4\pi\varepsilon_0 r}{e^2}$. Учитывая, что $n_{\max} = n_{2\max} - n_{1\max}$, получаем ответ: $n_{\max} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 hrc}{e^2\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2) \approx 4{,}3 \cdot 10^6$.

Для успешного решения этой задачи надо понять, что начальная кинетическая энергия электрона должна обеспечить такое изменение его потенциальной энергии, чтобы электрон переместился с поверхности шарика *в бесконечно удаленную точку*. Следует обратить внимание на то, что запись формулы для такого изменения потенциальной энергии электрона, как правило, вызывает трудности.

4.1.5. На металлическую пластинку сквозь сетку, параллельную пластинке, падает свет с длиной волны $\lambda = 0{,}4$ мкм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов между пластинкой и сеткой $U = 0{,}95$ В. Определить длину волны λ_{max}, соответствующую красной границе фотоэффекта. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

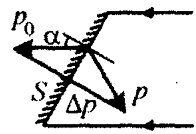
Решение. Фототок прекращается, когда выбитые из пластинки электроны перестают достигать сетку. Это происходит в том случае, когда вблизи сетки потенциальная энергия электронов в задерживающем электрическом поле становится равной кинстической энергии электронов, покидающих пластинку: $eU = \dfrac{mv^2}{2}$. Используя уравнение Эйнштейна, находим работу выхода для материала пластинки: $A = \dfrac{hc}{\lambda} - eU$. Длина волны λ_{max}, соответствующая красной границе фотоэффекта, определяется из условия, что энергия кванта равна работе выхода: $\dfrac{hc}{\lambda_{max}} = A$. Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{(hc/\lambda) - eU} \approx 0{,}58 \text{ мкм.}$$

Приступая к решению подобных задач, следует вспомнить, что красная граница фотоэффскта – это максимальная длина волны излучения, при которой еще возможен фотоэффект. Это означает, что энергия фотонов с такой длиной волны, падающих на поверхность металла, в точности равна работе выхода электрона из этого металла, а, следовательно, скорость электронов и их кинетическая энергия равны нулю.

4.1.6. Параллельный пучок света, падающий под углом $\alpha_1 = 60°$ на плоское зеркало, оказывает на него давление $p_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Па. Какое давление p_2 будет оказывать на зеркало этот пучок, если угол падения пучка станет равным $\alpha_2 = 45°$?

Решение. Давление, оказываемое светом на зеркало, обусловлено изменением импульса отражающихся от него фотонов. При отражении от зеркала модуль импульса каждого фотона меняется на величину $\Delta p = 2p_0 \cos\alpha$, где p_0 – модуль импульса падающего фотона, α – угол падения (см. рисунок). На зеркало площадью S за время Δt падает $n = Scn_0\Delta t \cos\alpha$ фотонов, где n_0 – число фотонов в единице объема, c – скорость света. Импульс силы, действующей на зеркало со стороны падающих фотонов за время Δt, равен $F\Delta t = n\Delta p = 2p_0 Scn_0 \Delta t \cos^2\alpha$. Следовательно, давление света, падающего на зеркало под углом α_1, равно $p_1 = 2p_0 n_0 c \cos^2\alpha_1$. Аналогично, давление света, падающего на зеркало под углом α_2, $p_2 = 2p_0 n_0 c \cos^2\alpha_2$. Отсюда



$$p_2 = p_1 \frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1} = 2p_1 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$

При решении задач на определение светового давления обычно допускают следующие ошибки. Во-первых, неверно записывают изменение импульса фотона при отражении от зеркала: $\Delta p = p_0 \cos\alpha$. В связи с этим, следует обратить внимание *на правильный* чертеж, поясняющий формулу для изменения импульса фотона. Во-вторых, неверно вычисляют число фотонов, падающих в единицу времени на зеркало. Надо понимать, что за время Δt зеркалу будет передан импульс только теми фотонами, которые находятся от него на расстоянии, не превышающем $c\Delta t$, то есть фотонами, заключенными в объеме $c\Delta t \cdot S\cos\alpha$.

4.1.7. Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, обстреливает неприятеля из лазерной пушки, которая в течение одного залпа испускает $n = 10$ коротких световых импульсов с энергией $E = 3$ кДж каждый. Какую скорость v приобретет корабль после залпа пушки, если масса корабля $M = 10$ тонн? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

Решение. Импульс одного фотона равен $p_1 = \dfrac{E_1}{c}$, где $E_1 = h\nu$ – энергия фотона. Импульс фотонов, испущенных за время залпа в одном направлении, выражается как $p = \dfrac{nE}{c}$. По закону сохранения импульса такой же по величине импульс приобретает корабль. Следовательно, скорость корабля после залпа

$$v = \frac{nE}{Mc} = 10^{-8} \text{ м/с.}$$

При решении этой задачи придется вспомнить закон сохранения импульса, справедливый для замкнутой системы тел «корабль + испущенные фотоны».

4.1.8. Электрон и протон ускоряются одинаковой разностью потенциалов до нерелятивистских скоростей. Во сколько раз отличаются длины волн де Бройля электрона и протона после ускорения? Считать, что начальная кинетическая энергия частиц была пренебрежимо мала.

Решение. Так как начальная кинетическая энергия электрона пренебрежимо мала и рассматривается случай небольших скоростей, то в результате ускорения электрон приобрел кинетическую энергию $E = \dfrac{p_e^2}{2m_e}$, где m_e – масса электрона, p_e – его импульс. При этом электрическое поле совершило над электроном работу $A = eU$, где e – модуль заряда электрона, U – ускоряющая разность потенциалов. Как следует из закона сохранения энергии, $E = \dfrac{p_e^2}{2m_e} = A = eU$. Отсюда $p_e = \sqrt{2m_e eU}$. Аналогично можно найти импульс протона после ускорения: $p_p = \sqrt{2m_p eU}$, где m_p –

масса протона. При записи последней формулы учтено, что модули зарядов протона и электрона одинаковы.

Согласно гипотезе, высказанной Луи де Бройлем, частица, имеющая импульс p, может характеризоваться длиной волны $\lambda = \frac{h}{p}$, где h – постоянная Планка. Следовательно, искомое отношение длин волн де Бройля электрона и протона равно

$$n = \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \approx 43 .$$

При решении подобных задач следует помнить содержание гипотезы де Бройля и понимать, что длина волны де Бройля определяется не массой частицы, а ее импульсом.

4.1.9. В сосуде объемом $V = 5$ л содержится $m = 2{,}5$ г молекулярного водорода при давлении $p = 2$ атм. Найти длину волны де Бройля для молекул водорода, находящихся в этом сосуде и имеющих скорость, близкую к среднеквадратичной скорости теплового движения.

Решение. Среднеквадратичная скорость теплового движения молекулы водорода $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, где T – термодинамическая температура газа, $M = 2$ г/моль – молярная масса водорода. В соответствии с уравнением Клапейрона–Менделеева, $pV = \frac{m}{M}RT$. С учетом этого $v = \sqrt{\frac{3pV}{m}}$. Длина волны де Бройля молекулы водорода равна $\lambda = \frac{h}{m_0 v}$, где $m_0 = \frac{M}{N_A}$ – масса молекулы водорода. Следовательно, $\lambda = \frac{hN_A}{M}\sqrt{\frac{m}{3pV}} \approx 0{,}18$ нм.

Отметим, что разные молекулы водорода в сосуде движутся с различными скоростями. Поэтому длины волн де Бройля для разных молекул газа при данных условиях могут лежать в широких пределах.

Задачи для самостоятельного решения

4.1.10.[E] При освещении ультрафиолетовым светом с частотой $\nu = 10^{15}$ Гц металлического проводника с работой выхода $A_{вых} = 3{,}11$ эВ выбиваются электроны. Чему равна максимальная скорость фотоэлектронов? Ответ выразить в м/с и округлить до одной значащей цифры.

Ответ: $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2(h\nu - A_{вых})}{m}} \approx 6 \cdot 10^5$ м/с.

4.1.11.[E] Какова максимальная скорость электронов, выбиваемых из металлической пластины светом с длиной волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{кр} = 540$ нм?

Ответ: $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2ch}{m}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_{кр}}\right)} \approx 800$ км/с.

4.1.12.[E] Фотоны, имеющие энергию $E = 5$ эВ, выбивают электроны с поверхности металла. Работа выхода электронов из металла равна $A_{вых} = 4{,}7$ эВ. Какой импульс приобретает электрон при вылете с поверхности металла?

Ответ: $p = \sqrt{2m(E - A_{вых})} \approx 3 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

4.1.13.[E] При облучении металла светом с длиной волны $\lambda = 245$ нм наблюдается фотоэффект. Работа выхода электрона из металла равна $A_{вых} = 2{,}4$ эВ. Рассчитайте величину напряжения, которое нужно приложить к металлу, чтобы уменьшить максимальную скорость вылетающих фотоэлектронов в 2 раза.

Ответ: $U = \dfrac{3}{4e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right) \approx 2$ В.

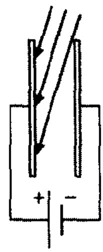
4.1.14.[E] Фотокатод, покрытый кальцием (работа выхода $A_{вых} = 4{,}42 \cdot 10^{-19}$ Дж), освещается светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 8{,}3 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля. Каков максимальный радиус R окружности, по которой движутся электроны?

Ответ: $R = \dfrac{1}{eB}\sqrt{2m\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right)} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ м.

4.1.15.[E] В вакууме находятся два покрытых кальцием электрода, к которым подключен конденсатор емкостью $C = 8000$ пФ. При длительном освещении катода светом с частотой $\nu = 10^{15}$ Гц фототок, возникший вначале, прекращается. Работа выхода электронов из кальция $A_{\text{вых}} = 4{,}42 \cdot 10^{-19}$ Дж. Какой заряд q при этом оказывается на обкладках конденсатора?

Ответ: $q = \dfrac{C(h\nu - A_{\text{вых}})}{e} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ Кл $= 11$ нКл.

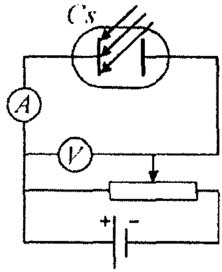
4.1.16. Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми $d = 1$ см много меньше их размеров, подключены к источнику с напряжением $U = 12{,}5$ В. Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем – светом частотой $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$ Гц. На какую величину Δl изменяется минимальное расстояние, на которое электроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света от ν_1 до ν_2? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше ν_2. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.



Ответ: $\Delta l = \dfrac{(\nu_1 - \nu_2)hd}{eU} \approx 1$ мм.

4.1.17. Шар радиусом $R = 1$ см из вольфрама, покрытый тонким слоем цезия, освещают аргоновым лазером, дающим излучение с длиной волны $\lambda_1 = 457$ нм. Какой заряд может приобрести шар, если красная граница фотоэффекта для цезия на вольфраме $\lambda_2 = 655$ нм?

Ответ: $Q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 hcR}{e}\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right) \approx 0{,}9$ пКл. Ответ справедлив при $\lambda_1 < \lambda_2$; если $\lambda_1 \geq \lambda_2$, то $Q = 0$.



4.1.18. Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (т.е. напряжения, при котором фототок прекращается) от длины волны света, падающего на цезиевую пластину Cs, производятся по схеме, изображенной на рисунке. При освещении светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм напряжение отсечки составило $U_1 = 1{,}19$ В, при $\lambda_2 = 0{,}5$ мкм – $U_2 = 0{,}57$ В. Определить по результатам этого опыта длину волны λ_{max}, соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.

Ответ: $\lambda_{max} = \dfrac{\lambda_1 \lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}(U_1 - U_2) \approx 0{,}65$ мкм.

4.1.19. Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}35$ мкм. Какова может быть максимальная величина тока фотоэлемента I, если поглощаемая световая мощность составляет $N = 2$ мВт? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $I = \dfrac{N\lambda e}{hc} = 0{,}56$ мА.

4.1.20. Кристалл рубина облучается вспышкой света длительностью $\tau = 10^{-3}$ с и мощностью $N = 200$ кВт. Длина волны света $\lambda = 0{,}7$ мкм, кристалл поглощает $\eta = 10\%$ энергии излучения. Вычислить количество квантов света n, поглощенных кристаллом. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Ответ: $n = \dfrac{\eta}{100\%} \cdot \dfrac{N\tau\lambda}{hc} \approx 7{,}0 \cdot 10^{19}$.

4.1.21. Проводя облучение катода фотоэлемента пучком света мощностью $N_1 = 1{,}5$ мВт с длиной волны $\lambda_1 = 400$ нм, измерили величину тока насыщения. Затем катод фотоэлемента начали облучать светом с длиной волны $\lambda_2 = 500$ нм. Какой должна быть мощность N_2 падающего на катод света, чтобы ток насыщения достиг той же величины, что и в первом случае? Квантовый выход фотоэффекта, т.е. отношение числа вырванных из катода электронов к числу падающих на его поверхность фотонов, в первом случае равен $\eta_1 = 0{,}35$, а во втором случае равен $\eta_2 = 0{,}3$.

Ответ: $N_2 = N_1 \dfrac{\lambda_1 \eta_1}{\lambda_2 \eta_2} = 1{,}4$ мВт.

4.1.22. Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, проводит сеанс связи с Землей, направляя в ее сторону лазерный луч. На какое расстояние S от первоначального положения сместится корабль к окончанию сеанса связи, если мощность лазерного луча $N = 60$ Вт, масса корабля $M = 10$ тонн, продолжительность сеанса $\tau = 1$ час? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

$S = \dfrac{N\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

4.1.23. При движении электрона в электрическом поле его длина волны де Бройля увеличилась от $\lambda_1 = 0{,}75$ нм до $\lambda_2 = 1{,}5$ нм. На сколько при этом уменьшилась кинетическая энергия электрона? Ответ выразить в электронвольтах.

Ответ: $\Delta E = \dfrac{h^2}{2m}\left(\dfrac{1}{\lambda_1^2} - \dfrac{1}{\lambda_2^2}\right) \approx 2$ эВ.

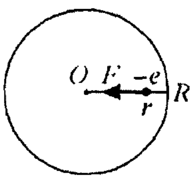
4.1.24. Какую кинетическую энергию нужно сообщить электрону для того, чтобы его длина волны де Бройля стала равна длине волны электромагнитного излучения с энергией фотона $E = 2$ кэВ? Ответ выразить в электронвольтах.

Ответ: $W = \dfrac{E^2}{2mc^2} \approx 3{,}9$ эВ.

4.2. ФИЗИКА АТОМА

Примеры решения задач и методические рекомендации

4.2.1. Согласно модели Дж. Дж. Томсона (1903 г.), атом водорода представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого находится отрицательный точечный заряд – электрон, причем в невозбужденном атоме электрон покоится в центре шара. Предположим, что электрон сместили от центра шара на некоторое расстояние, не превышающее радиус шара, и предоставили самому себе. Определить период T возникших при этом свободных колебаний электрона, считая потери на излучение малыми. Радиус шара принять равным $R = 3 \cdot 10^{-10}$ м, а его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл считать равномерно распределенным по объему. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Решение. Пусть r – расстояние от центра заряженного шара (точки O) до электрона. На электрон действует сила $F = eE$, направленная к центру шара. Здесь E – напряженность электрического поля в точке, где расположен электрон. Эта напряженность поля создается только той частью q полного заряда e, которая расположена внутри сферы радиусом r. Так как заряд распределен по шару равномерно, то справедлива пропорция: $\dfrac{q}{e} = \dfrac{(4/3)\pi r^3}{(4/3)\pi R^3} = \dfrac{r^3}{R^3}$.

Отсюда $q = \dfrac{r^3}{R^3} e$, и $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$. Следовательно,

$F(r) = eE = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$. Уравнсние движения электрона под действием этой силы (второй закон Ньютона) имеет вид:

$m_e\ddot{r} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$, или $\ddot{r} + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}r = 0$. Таким образом, получается уравнение гармонических колебаний. Отсюда находим круговую частоту колебаний электрона $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$. Поскольку период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, ответ имеет вид: $T = \dfrac{4\pi R}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e R}$. Подставляя в полученную формулу числовые значения и проверяя размерность, окончательно получаем:

$$T = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(3\cdot 10^{-10}\ \text{м})}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}\sqrt{3{,}14\cdot(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м})\cdot(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг})\cdot(3\cdot 10^{-10}\ \text{м})} \approx$$
$$\approx 2\cdot 10^{-15}\ \text{с}.$$

При решении этой задачи важно понимать, что сила, возвращающая электрон к положению равновесия – это сила, действующая со стороны электрического поля заряда, находящегося внутри шара радиусом r. Поэтому основной проблемой является правильное определение напряженности электрического поля в некоторой точке внутри равномерно заряженного шара.

Рассмотренная задача показывает, что модель Дж. Дж. Томсона предсказывает существование в спектре излучения атома водорода одной-единственной линии с длиной волны излучения $\lambda = cT \approx 600$ нм. Таким образом, данная модель не объясняет всего разнообразия экспериментально наблюдаемых спектральных линий и не позволяет понять, почему атом водорода излучает световые волны только строго определенных частот. Объяснение этих фактов можно получить при помощи полуклассической модели атома водорода, предложенной Нильсом Бором.

4.2.2. Пользуясь постулатами Бора, правилом частот Бора и правилом квантования Бора, найти радиус первой стационарной орбиты атома водорода и его энергию ионизации.

Решение. Согласно постулатам Бора, электрон в атоме может находиться не во всех состояниях, допускаемых классической механикой, а только в некоторых состояниях с определенными значениями энергии (такие состояния называются стационарными). Если атом находится в этих состояниях, то электрон, обращаясь по соответствующей стационарной орбите, не излучает электромагнитные волны, как того требуют законы классической электродинамики. При переходе атома из одного стационарного состояния с энергией E_2 в другое стационарное состояние с меньшей энергией E_1 (то есть при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую) атом испускает фотон, то есть излучает свет. Частота излучаемого света ν определяется при помощи правила частот Бора: $h\nu = E_2 - E_1$, где h – постоянная Планка. Согласно правилу квантования Бора, для стационарной круговой орбиты электрона произведение импульса $m_e v$ электрона на радиус r орбиты пропорционально целому числу постоянных Планка: $m_e v \cdot r = \frac{1}{2\pi} \cdot nh$, где m_e – масса электрона, v – его скорость, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Рассмотрим атом водорода, в котором электрон находится на стационарной орбите радиусом r с номером n. Будем считать, что для описания движения электрона по этой орбите можно применять законы классической механики совместно с правилом квантования Бора (такой подход к решению задачи называется полуклассическим). Отрицательно заряженный электрон притягивается к положительно заряженному ядру с силой, определяемой при помощи закона Кулона: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$. Тогда уравнение движения электрона по орбите (второй закон Ньютона) имеет вид:

$$\frac{m_e v^2}{r} = F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2},$$

где e – модуль заряда электрона. При этом энергия E электрона на стационарной орбите складывается из кинетической энергии $W = \frac{m_e v^2}{2}$ и потенциальной энергии взаимодействия с ядром $U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$, то есть $E = W + U = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$.

Привлекая правило квантования Бора, из записанных уравнений можно выразить радиус орбиты электрона и его энергию:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2 \quad \text{и} \quad E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Видно, что и радиус орбиты электрона, и его энергия зависят от номера орбиты n; поэтому величины r и E снабжены соответствующим индексом.

Первой (наинизшей) стационарной орбите соответствует $n = 1$. Следовательно, радиус первой стационарной орбиты атома водорода равен $(r_1)_\text{H} = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м = 0,5 ангстрем (1 ангстрем – внесистемная единица измерения, равная 10^{-10} м; обозначается Å). Найденная величина называется боровским радиусом и обозначается $r_\text{Б}$.

Энергия ионизации атома водорода – это минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону, находящемуся на первой стационарной орбите, для того, чтобы он смог покинуть атом, то есть удалиться от ядра на очень большое расстояние. Так как при очень больших расстояниях между электроном и ядром потенциальная энергия их взаимодействия пренебрежимо мала, то искомая энергия ионизации атома водорода равна

$$(E_i)_\text{H} = 0 - E_1 = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \approx 21{,}70 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 13{,}56 \text{ эВ}.$$

Результаты этой задачи можно использовать и для решения других задач, в которых требуется отыскание радиусов стационарных орбит атома водорода. Также при решении различных задач часто используется значение энергии ионизации атома водорода $(E_i)_\text{H} \approx 13{,}56$ эВ, которое полезно помнить.

4.2.3. Используя результаты, полученные при решении предыдущей задачи, найти максимально возможные частоты излучения атома водорода (так называемые границы спектральных серий) при переходе электрона на k-ю стационарную орбиту при $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Получим формулу, описывающую спектры атома водорода. Пусть электрон переходит со стационарной орбиты с номером n на стационарную орбиту с номером $k < n$. При этом в соответствии с правилом частот Бора атом испускает фотон, частота которого равна

$$\nu_{nk} = \frac{E_n - E_k}{h} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{c}{\lambda_{nk}},$$

где λ_{nk} – длина испускаемой атомом электромагнитной волны. Отсюда

$$\frac{1}{\lambda_{nk}} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = -R_{\text{H}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $R_{\text{H}} = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} \approx 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – величина, называемая постоянной Ридберга для водорода. Выведенная зависимость дает возможность рассчитывать длины волн в спектрах излучения (при $n > k$) и в спектрах поглощения (при $n < k$) атома водорода. Во втором случае длина волны λ_{nk} получается отрицательной, что соответствует поглощению энергии атомом, то есть отрицательному значению $E_n - E_k$.

Из найденной зависимости можно получить формулы для расчета длин волн излучения в спектральных сериях атома водорода. Запишем такие формулы для $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

серия Лаймана ($k = 1$): $\dfrac{1}{\lambda_{n1}} = -R_{\text{H}}\left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$;

серия Бальмера ($k = 2$): $\dfrac{1}{\lambda_{n2}} = -R_{\text{H}}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2^2}\right)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$;

серия Пашена ($k = 3$): $\dfrac{1}{\lambda_{n3}} = -R_{\text{H}}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{3^2}\right)$, $n = 4, 5, 6, \ldots$;

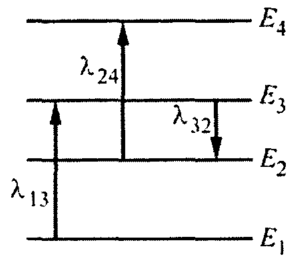
серия Брэккета ($k = 4$): $\dfrac{1}{\lambda_{n4}} = -R_{\text{H}}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{4^2}\right)$, $n = 5, 6, 7, \ldots$;

серия Пфунда ($k = 5$): $\dfrac{1}{\lambda_{n5}} = -R_{\text{H}}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{5^2}\right)$, $n = 6, 7, 8, \ldots$.

Границе спектральной серии (максимально возможной частоте излучения ν_k) соответствует минимальная длина волны λ_k, которая получается при $n \to \infty$. Отсюда для границы спектральной серии с данным k получаем: $\nu_k = \dfrac{c}{\lambda_k} = \dfrac{cR_H}{k^2}$. Подставляя в эту формулу значения $k = 1, 2, 3, 4, 5$, получим: $\nu_1 \approx 3{,}30 \cdot 10^{15}$ Гц, $\nu_2 \approx 0{,}83 \cdot 10^{15}$ Гц, $\nu_3 \approx 0{,}37 \cdot 10^{15}$ Гц, $\nu_4 \approx 0{,}21 \cdot 10^{15}$ Гц, $\nu_5 \approx 0{,}13 \cdot 10^{15}$ Гц.

Отметим, что записанные выше формулы, предназначенные для расчета длин волн излучения атома водорода, часто используются при решении задач.

4.2.4.[E] На рисунке изображены энергетические уровни атома и указаны длины волн фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах с одного уровня на другой. Экспериментально установлено, что минимальная длина волны для фотонов, излучаемых при переходах между этими уровнями, равна λ_0 = 250 нм. Какова величина λ_{13}, если λ_{32} = 545 нм, λ_{24} = 400 нм?

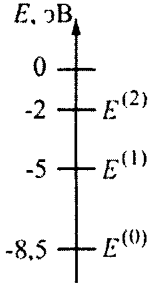


Решение. При переходе с одного энергетического уровня на другой атом излучает или поглощает фотон, длина волны λ для которого определяется правилом частот Бора: $\Delta E = \dfrac{hc}{\lambda}$. Здесь ΔE – разность энергий электрона, находящегося в атоме на конечном и на исходном энергетических уровнях, c – скорость света, h – постоянная Планка. Из записанной формулы и из рисунка видно, что минимальной длине волны λ_0 соответствует переход между энергетическими уровнями 1 и 4. Применяя правило частот Бора для этой длины волны, а также для длин волн λ_{13}, λ_{32} и λ_{24}, получим:

$$E_4 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad E_3 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_{13}}, \quad E_3 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_{32}}, \quad E_4 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_{24}}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем ответ: $\lambda_{13} = \left(\dfrac{1}{\lambda_0} + \dfrac{1}{\lambda_{32}} - \dfrac{1}{\lambda_{24}}\right)^{-1} \approx 300$ нм.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в записанной выше системе из четырех уравнений содержится пять неизвестных величин. Однако это не мешает получить ответ, поскольку при вычитании друг из друга соответствующих пар уравнений получается система из двух уравнений, которая содержит всего две неизвестные величины – разность энергий $E_1 - E_2$ и искомую длину волны λ_{13}.



4.2.5.[Е] Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоторого вещества имеет вид, показанный на рисунке, и атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(1)}$. Электрон, столкнувшись с одним из таких атомов, отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Импульс электрона p после столкновения с покоящимся атомом оказался равным $1{,}2 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с. Определите кинетическую энергию электрона до столкновения. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.

Решение. Вначале надо разобрать описанный в условии процесс и построить его модель. Электрон после столкновения приобрел дополнительную кинетическую энергию за счет того, что энергия атома понизилась – он перешел в наинизшее (основное) состояние с энергией $E^{(0)} = -8{,}5$ эВ из состояния с энергией $E^{(1)} = -5$ эВ, отдав электрону энергию $\Delta E = E^{(1)} - E^{(0)} = 3{,}5 \text{ эВ} = 5{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Электрон после столкновения с атомом имеет импульс p, а его кинетическая энергия (в нерелятивистском приближении) равна $E_{к2} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$. Запишем закон сохранения энергии, учитывая условие, что атом не испускает свет, и пренебрегая кинетической энергией атома после столкновения: $E_{к2} = \dfrac{p^2}{2m} = E_{к1} + \Delta E$, откуда

$$E_{к1} = \frac{p^2}{2m} - (E^{(1)} - E^{(0)}) \approx 2{,}3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 1{,}4 \text{ эВ}.$$

Решая подобные задачи, нужно учитывать, что масса атома намного больше массы электрона, и поэтому в результате столкновения атом практически не приобретает никакого импульса и кинетической энергии.

4.2.6. Найти энергию связи электрона для двухзарядного иона лития Li^{2+} (такой ион лития является водородоподобным атомом, так как у него вокруг атомного ядра обращается всего один электрон). Ядро лития содержит $Z = 3$ протона (Z называется зарядовым числом атома).

Решение. Так как двухзарядный ион лития является водородоподобным атомом, то для него можно применить полуклассический подход Бора. Все уравнения, которые были ранее записаны для атома водорода, остаются справедливыми. Единственным отличием по сравнению с атомом водорода является то, что сила кулоновского взаимодействия валентного электрона с ядром лития равна $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2}$. Следовательно, мы можем воспользоваться готовым результатом для энергии E_n электрона на n-й стационарной орбите, если заменим в ранее выведенной формуле e^2 на Ze^2. В результате получим: $E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$. Отсюда энергия связи электрона для двухзарядного иона лития (она же – энергия ионизации этого иона лития) равна

$$(E_i)_{\mathrm{Li}} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2} = Z^2 (E_i)_{\mathrm{H}} \approx 195{,}3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 122 \text{ эВ}.$$

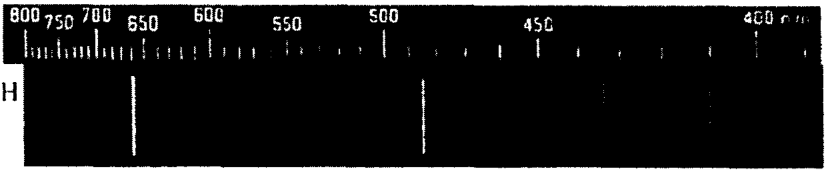
Отметим, что для водородоподобных атомов справедлива следующая формула, позволяющая рассчитывать длины волн различных спектральных серий:

$$\frac{1}{\lambda_{nk}} = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 c h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = -R_H Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Она легко выводится с использованием полученного выражения для энергии E_n водородоподобного атома.

Задачи для самостоятельного решения

4.2.7.[E] На фотографии представлен спектр излучения водорода в видимой части спектра. Цифры на числовой оси – длины волн в нанометрах (нм). Оцените в джоулях (Дж) энергию фотона с максимальной энергией в видимой части спектра водорода. Полученный результат умножьте на 10^{20} и округлите его до двух значащих цифр.



Ответ: $E_{\max} \cdot 10^{20} = \dfrac{hc}{\lambda_{\min}} \approx 48$ Дж.

4.2.8. Найти скорость электрона, обращающегося в атоме водорода по первой стационарной орбите.

Ответ: $v = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \approx 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

4.2.9. Найти максимальную длину волны для спектральной серии Лаймана (соответствующая линия в спектре называется резонансной линией водорода).

Ответ: $\lambda_{\text{р}} = \dfrac{4}{3R_{\text{H}}} = \dfrac{32\varepsilon_0^2 c h^3}{3m_e e^4} \approx 121$ нм.

4.2.10. Атом водорода перешел из второго энергетического состояния в шестое. Как и во сколько раз изменилась при этом энергия атома?

Ответ: Увеличилась, при этом ее модуль уменьшился в 9 раз.

4.2.11. Какую минимальную скорость должен иметь электрон для того, чтобы столкнувшись с атомом водорода, перевести его из первого энергетического состояния в третье? Считать, что перед столкновением атом водорода двигался с пренебрежимо малой скоростью.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_0 h} \approx 2 \cdot 10^6$ м/с.

4.2.12. Найти радиус наинизшей орбиты электрона в однозарядном ионе гелия He^+. Ядро гелия содержит $Z = 2$ протона. Ион гелия является водородоподобным атомом.

Ответ: $(r_1)_{\mathrm{He}} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2 Z} = \frac{(r_1)_{\mathrm{H}}}{Z} \approx 0{,}25 \cdot 10^{-10}$ м $= 0{,}25$ Å.

4.2.13. Однократно ионизированный ион гелия He^+ перешел из четвертого энергетического состояния в третье, испустив при этом фотон с длиной волны λ_{He}. Атом водорода перешел из третьего энергетического состояния во второе, испустив при этом фотон с длиной волны λ_{H}. Найти отношение $\lambda_{\mathrm{H}} / \lambda_{\mathrm{He}}$.

Ответ: $\lambda_{\mathrm{H}} / \lambda_{\mathrm{He}} = 1{,}4$.

4.2.14. Какую наименьшую энергию нужно сообщить трижды ионизованному атому бериллия Be^{3+}, находящемуся в основном состоянии, для того, чтобы в спектре этого атома наблюдались все возможные спектральные линии? Зарядовое число бериллия $Z = 4$.

Ответ: $E = hcZ^2 R_H = \frac{m_e}{2}\left(\frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h}\right) \approx 218$ эВ.

4.2.15. Двухзарядный ион лития Li^{2+} перешел из возбужденного состояния в основное. Испущенный при этом фотон попал в однозарядный ион гелия He^{+}, в результате чего из него вылетел электрон. Найти, с какого энергетического уровня мог произойти переход иона Li^{2+} в основное состояние?

Ответ: с любого.

4.2.16. Фотон с частотой $\nu = 1,5 \cdot 10^{7}$ ГГц попадает в однозарядный ион гелия He^{+} и выбивает из него электрон. Найти скорость выбитого электрона.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(h\nu - \frac{m_e e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right)} \approx 1,65 \cdot 10^{6}$ м/с.

4.2.17. При облучении некоторого водородоподобного атома рентгеновским излучением с длиной волны $\lambda = 5$ нм из него был выбит электрон, который приобрел кинетическую энергию $E = 124,5$ эВ. Определите зарядовое число Z этого атома.

Ответ: $Z = \frac{2\varepsilon_0 h}{e^2}\sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda} - E\right)} = 3$ (с точностью до ошибки округления), то есть это атом Li.

4.3. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Примеры решения задач и методические рекомендации

4.3.1.[E] Образец, содержащий радий, за 1 с испускает $N_0 = 3{,}7\cdot10^{10}$ α-частиц. За $t = 1$ ч выделяется энергия $E = 100$ Дж. Каков средний импульс α-частиц? Масса α-частиц равна $m = 6{,}7\cdot10^{-27}$ кг. Энергией отдачи ядер, γ-излучением и релятивистскими эффектами пренебречь.

Решение. За время $t = 1$ ч $= 3600$ с образец испускает $N = N_0t$ α-частиц. Следовательно, средняя энергия одной частицы равна $W = \dfrac{E}{N} = \dfrac{E}{N_0t}$. Энергия нерелятивистской частицы связана с ее импульсом p следующим образом: $W = \dfrac{p^2}{2m}$. Отсюда средний импульс α-частицы равен

$$p = \sqrt{2mW} = \sqrt{\frac{2mE}{N_0t}} = \sqrt{\frac{2\cdot(6{,}7\cdot10^{-27}\ \text{кг})\cdot(100\ \text{Дж})}{(3{,}7\cdot10^{10}\ \text{с}^{-1})\cdot(3600\ \text{с})}} \approx 10^{-19}\ \text{кг·м/с}.$$

После того, как ответ получен, полезно проверить: действительно ли в данном случае можно считать α-частицу нерелятивистской и использовать записанную выше формулу, связывающую энергию и импульс частицы? Для того чтобы ответить на этот вопрос, найдем среднюю скорость частицы: $v = \dfrac{p}{m} \approx 0{,}15\cdot10^8$ м/с, что в 20 раз меньше скорости света в вакууме. Следовательно, релятивистскими эффектами и в самом деле можно пренебречь.

4.3.2. Свободное покоящееся атомное ядро иридия ^{191}Ir переходит из возбужденного состояния в основное, испуская γ-квант. Найти кинетическую энергию, которую приобрело ядро, если его энергия возбуждения равнялась $E = 129$ кЭв.

Решение. В соответствии с законом сохранения энергии, энергия возбуждения ядра E превратилась в энергию $h\nu$ испущенного γ-кванта и в кинетическую энергию W отдачи ядра: $E = h\nu + W$. Кроме того, для данного процесса должен выполняться закон сохранения импульса. Так как полный импульс ядра до испускания γ-кванта был равен нулю, то и после испускания суммарный импульс ядра и γ-кванта также будет равен нулю. Отсюда получаем: $\frac{h\nu}{c} - p = 0$, где p – модуль импульса ядра после испускания γ-кванта (знак «минус» указывает на то, что γ-квант и ядро летят в противоположных направлениях). Воспользуемся нерелятивистской формулой для связи кинетической энергии и импульса ядра: $W = \frac{p^2}{2m}$, где $m \approx 191$ а.е.м. – масса ядра иридия. В результате получим квадратное уравнение для определения энергии ядра: $W = \frac{(E-W)^2}{2mc^2}$. Его решение имеет вид: $W = E + mc^2 - \sqrt{mc^2(2E + mc^2)}$. Подставляя числа, и выражая энергию в электронвольтах, получим ответ: $W \approx 0{,}047$ эВ.

Отметим, что энергия отдачи ядра очень мала по сравнению с энергией возбуждения, то есть практически всю энергию уносит γ-квант. Это обстоятельство позволяет получить приближенный ответ задачи, который имеет не только более компактный вид, но и гораздо более удобен для вычислений. Действительно, в записанном выше квадратном уравнении в числителе стоит разность $E - W$, в которой величиной W можно пренебречь. Тогда сразу получаем следующую приближенную формулу $W \approx \frac{E^2}{2mc^2}$.

4.3.3. Радиоактивный изотоп радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ испытывает α-распад, в результате чего получается радиоактивный радон $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$. В пробирке объемом $V = 1$ см^3 находятся $m_{\mathrm{Ra}} = 1$ мг радия и газообразный радон при температуре $T = 300$ К. При этом количество радона в пробирке таково, что число его атомов с течением времени остается неизменным. Найти парциальное давление радона в пробирке. Периоды полураспада радия и радона принять равными $\tau_1 = 1600$ лет и $\tau_2 = 3{,}8$ суток соответственно.

Решение. Пусть в пробирке находится N_{10} атомов радия и N_{20} атомов радона. Тогда, в соответствии с законом радиоактивного распада, число атомов радия и радона через время t после начала наблюдения будет равно $N_1(t) = N_{10}2^{-t/\tau_1}$ и $N_2(t) = N_{20}2^{-t/\tau_2}$ соответственно. Найдем скорость изменения числа ядер каждого из изотопов, продифференцировав $N_1(t)$ и $N_2(t)$ по времени:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\frac{N_{10}\ln 2}{\tau_1}\cdot 2^{-t/\tau_1} = -\frac{\ln 2}{\tau_1}N_1(t),$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\frac{N_{20}\ln 2}{\tau_2}\cdot 2^{-t/\tau_2} = -\frac{\ln 2}{\tau_2}N_2(t).$$

Знак «минус» показывает, что число атомов данного изотопа с течением времени уменьшается из-за радиоактивного распада.

По условию задачи, число атомов радона в пробирке с течением времени остается неизменным. Это означает, что модули скоростей распада радия и радона одинаковы, то есть за любой промежуток времени убыль атомов радона при его распаде компенсируется прибылью атомов радона, которые получаются при распаде радия. Так как период полураспада радия на много порядков превышает период полураспада радона, то число атомов радия в течение времени наблюдения также можно считать практически неизменным. Следовательно, условие неизменности числа атомов радона можно записать в виде: $\dfrac{N_1}{\tau_1} = \dfrac{N_2}{\tau_2}$, где N_1 и N_2 – числа атомов радия и радона в пробирке. Данное условие называется условием радиоактивного равновесия (или условием векового равновесия). Оно часто используется при решении задач.

В соответствии с уравнением Клапейрона–Менделеева, искомое парциальное давление радона в пробирке равно $p = \dfrac{m_{Rn}RT}{M_{Rn}V}$, где m_{Rn} – масса радона, $M_{Rn} = 222$ г/моль – его молярная масса. Для масс радия и радона можно записать: $m_{\text{Ra}} = \dfrac{M_{\text{Ra}} N_1}{N_A}$ и $m_{\text{Rn}} = \dfrac{M_{\text{Rn}} N_2}{N_A}$, где $M_{\text{Ra}} = 226$ г/моль – молярная масса радия. С учетом полученного выше условия радиоактивного распада, получаем: $m_{\text{Rn}} = \dfrac{M_{\text{Rn}}}{N_A} \cdot \dfrac{\tau_2}{\tau_1} N_1 = \dfrac{M_{\text{Rn}}}{N_A} \cdot \dfrac{\tau_2}{\tau_1} \cdot \dfrac{m_{\text{Ra}} N_A}{M_{\text{Ra}}} = \dfrac{M_{\text{Rn}} m_{\text{Ra}} \tau_2}{M_{\text{Ra}} \tau_1}$. Отсюда для парциального давления радона в пробирке имеем: $p = \dfrac{m_{\text{Rn}} RT}{M_{\text{Rn}} V} = \dfrac{RTm_{\text{Ra}} \tau_2}{M_{\text{Ra}} V \tau_1} \approx 72$ мПа. Подставляя числа и проверяя размерность, получаем:

$$p = \frac{8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot (300\ \text{К}) \cdot (10^{-6}\ \text{кг}) \cdot (3{,}8\ \text{сут.})}{0{,}226 \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 \cdot (1600 \cdot 365\ \text{сут.})} \approx 72\ \text{мПа}.$$

Отметим, что полученное в ходе решения этой задачи условие радиоактивного равновесия справедливо только в случае, если период полураспада исходного изотопа намного больше периода полураспада получающегося изотопа.

4.3.4.$^{\text{E}}$ Определите энергию, выделившуюся при протекании следующей реакции: ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$. Ответ выразите в пикоджоулях (пДж) и округлите до целых.

Решение. Для решения этой задачи нужно воспользоваться законом сохранения энергии при ядерных реакциях. Сумма массовых чисел ядер до реакции ра́вна сумме массовых чисел ядер после реакции плюс дефект массы Δm, который и «превращается» в энергию, выделяющуюся при протекании реакции: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. В таблицах приведены массы атомов, выраженные в атомных единицах массы (а.е.м), причем 1 а.е.м $\approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, что соответствует энергии (1 а.е.м)$\cdot c^2 \approx 931{,}5$ МэВ ≈ 150 пДж.

Для приведенной в условии реакции имеем:

$7{,}01601 + 1{,}00783 = 4{,}00260 + 4{,}00260 + \Delta m$.

Отсюда $\Delta m = 0{,}01864$ а.е.м., и

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx 0{,}01864\,\text{а.е.м.} \cdot 150\,\text{пДж} \approx 3\ \text{пДж}.$$

Отметим, что при решении подобных задач закон сохранения энергии гораздо удобнее записывать, выражая энергию в атомных единицах массы – при этом промежуточные вычисления получаются значительно проще. При необходимости перевод а.е.м. в другие единицы измерения энергии (электрон-вольты или джоули) можно выполнить на заключительном этапе решения задачи.

4.3.5. Найти, на сколько отличаются энергии связи ядер ${}^7_3\mathrm{Li}$ и ${}^6_3\mathrm{Li}$. Ответ выразить в МэВ.

Решение. Для вычисления энергии связи некоторого ядра ${}^A_Z\mathrm{X}$ нужно воспользоваться формулой: $E_{\text{св}} = (Zm_{\mathrm{H}} + (A-Z)m_n - M)c^2$, где Z – заряд ядра атома, A – число нуклонов в ядре, m_{H}, m_n и M – массы атома водорода, нейтрона и рассматриваемого ядра. Все массы, необходимые для вычислений, более удобно выражать в а.е.м. – именно в этих единицах они обычно приведены в таблицах. При этом и энергия связи, деленная на c^2, также будет выражена в а.е.м. Как следует из указанных таблиц, $m_{\mathrm{H}} \approx 1{,}00783$ а.е.м., $m_n \approx 1{,}00866$ а.е.м.

Для атома ${}^7_3\mathrm{Li}$ имеем: $Z = 3$, $A = 7$, его масса равна $M \approx 7{,}01601$ а.е.м. Отсюда

$E_{\text{св}1}/c^2 = 3 \cdot 1{,}00783 + 4 \cdot 1{,}00866 - 7{,}01601 = 0{,}04212$ а.е.м.

Аналогично для атома ${}^6_3\mathrm{Li}$ получаем: $Z = 3$, $A = 6$, $M \approx 6{,}01513$ а.е.м., и

$E_{\text{св}2}/c^2 = 3 \cdot 1{,}00783 + 3 \cdot 1{,}00866 - 6{,}01513 = 0{,}03434$ а.е.м.

Следовательно, искомая разность энергий связи ядер ${}^7_3\mathrm{Li}$ и ${}^6_3\mathrm{Li}$ равна $\Delta E/c^2 = (E_{\text{св}1} - E_{\text{св}2})/c^2 = 0{,}00778$ а.е.м., что соответствует энергии $\Delta E \approx 7{,}25$ МэВ (при расчете учтено, что $(1\ \text{а.е.м})\cdot c^2 \approx 931{,}5$ МэВ).

При решении подобных задач следует помнить о том, что в записанную формулу для вычисления энергии связи входят массы *атомов*, а не ядер. В случае если в используемых таблицах приведены массы ядер, то для получения масс атомов следует добавить к массам ядер суммарную массу имеющихся в атоме электронов. Относительная атомная масса электрона равна $m_e \approx 0{,}00055$ а.е.м., что соответствует энергии $m_e c^2 \approx 0{,}511$ МэВ.

4.3.6. При бомбардировке ядер железа ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ нейтронами образуются некоторый β-радиоактивный изотоп и протон. Написать уравнения реакций образования данного радиоактивного изотопа и происходящего с ним β-распада. Определить, что это за изотоп, и во что он превращается в результате β-распада.

Решение. Сначала запишем уравнение реакции синтеза неизвестного изотопа X, обозначив его зарядовое число через Z, а массовое число через M:

$${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\to{}^{M}_{Z}\mathrm{X}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Поскольку при ядерных реакциях должны выполняться законы сохранения электрического заряда и массового числа, находим: $Z = 25$, $M = 56$, то есть получающийся изотоп – это марганец ${}^{56}_{25}\mathrm{Mn}$. Далее этот изотоп претерпевает β-распад, реакция которого имеет вид: ${}^{56}_{25}\mathrm{Mn}\to{}^{56}_{26}\mathrm{Fe}+{}^{0}_{-1}\mathrm{e}$. Значит, в результате радиоактивного β-распада полученный изотоп марганца превращается обратно в железо ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$.

Отметим полезный технический прием, который использовался при решении этой задачи. Если требуется определить исходный элемент или продукт ядерной реакции, то сначала нужно записать уравнение этой реакции в общем виде, обозначив неизвестное ядро через ${}^{M}_{Z}\mathrm{X}$. Затем, используя законы сохранения электрического заряда и массового числа, можно определить зарядовое и массовое числа неизвестного ядра. Далее при помощи таблицы периодической системы элементов Д. И. Менделеева можно узнать название химического элемента, изотопу которого соответствует ядро с найденными параметрами.

Задачи для самостоятельного решения

4.3.7. Атомная электростанция расходует за время $t = 1$ сутки $m = 200$ г изотопа урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$. При делении одного ядра этого изотопа выделяется энергия $E = 200$ МэВ. Сколько электрических лампочек мощностью $P = 100$ Вт может питать эта электростанция, если ее КПД равен $\eta = 20\%$?

Ответ: $k = \dfrac{mEN_A}{M_{\mathrm{U}}Pt} \cdot \dfrac{\eta}{100\%} \approx 380000$.

4.3.8. π^0-мезон массой $m = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ кг распадается на два γ-кванта. Найдите модуль импульса одного из образовавшихся γ-квантов в системе отсчета, где первичный π^0-мезон покоится.

Ответ: $p = \dfrac{mc}{2} = 3{,}6 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с.

4.3.9. Найти наименьшую частоту ν электромагнитного излучения, способного вызвать рождение пары частиц «электрон + позитрон».

Ответ: $\nu = \dfrac{2m_e c^2}{h} \approx 2{,}5 \cdot 10^{20}$ Гц.

4.3.10. При распаде ядра радия $^{226}\mathrm{Ra}$ вылетает α-частица со скоростью $v = 1{,}5 \cdot 10^7$ м/с. Найти, какую энергию уносят за время $\tau = 1$ сутки α-частицы, образовавшиеся в результате распада $m = 1$ мг радия. Период полураспада радия $T = 1600$ лет. Другие продукты распада радия не учитывать.

Ответ: $E = \dfrac{M_{\mathrm{He}} m \tau v^2 \cdot \ln 2}{2TM_{\mathrm{Ra}}} \approx 2{,}4$ Дж.

4.3.11. Изотоп $^{234}\mathrm{U}$ является продуктом распада основного изотопа урана $^{238}\mathrm{U}$. Период полураспада $^{238}\mathrm{U}$ равен $T_{238} = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет, а период полураспада $^{234}\mathrm{U}$ составляет $T_{234} = 2{,}5 \cdot 10^5$ лет. Определить процентное содержание $^{234}\mathrm{U}$ в уране $^{238}\mathrm{U}$.

Ответ: $n = \dfrac{T_{234}}{T_{238}} \approx 0{,}0056\%$.

4.3.12. Природный уран состоит на $n_1 = 0{,}7\%$ из изотопа ^{235}U и на $n_2 = 99{,}3\%$ – из ^{238}U. По современным представлениям, все элементы тяжелее железа образовались при взрывах сверхновых звёзд, а после этого из получившихся газопылевых облаков возникли звёзды следующего «поколения», в частности, Солнце и планеты Солнечной системы. По-видимому, в этих выбросах всех изотопов урана было примерно поровну. Оцените, сколько лет назад произошёл тот выброс вещества, из которого сформировалась наша Земля. Период полураспада, то есть время, в течение которого число атомов данного изотопа уменьшается в 2 раза, для ^{235}U равно $T_1 = 7\cdot10^8$ лет, а для ^{238}U – $T_2 = 4{,}5\cdot10^9$ лет.

Ответ: $t = \dfrac{\lg(n_2/n_1)}{\lg 2}\cdot\dfrac{T_1T_2}{T_2 - T_1} \approx 6\cdot10^9$ лет.

4.3.13. Найти наименьшую энергию α-частицы, при которой становится возможной следующая ядерная реакция: ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$. Ответ выразить в пДж.

Ответ: $E \approx 0{,}45$ пДж.

4.3.14. Найти наименьшую частоту γ-кванта, которая необходима для осуществления следующей ядерной реакции: ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

Ответ: $\nu \approx 5{,}4\cdot10^{20}$ Гц.

4.3.15. Предполагается, что в термоядерном реакторе с дейтериевым горючим могут происходить следующие вторичные термоядерные реакции: ${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$ и ${}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$. Найти, на сколько отличается энергетический выход этих реакций? Ответ выразить в МэВ.

Ответ: $\Delta Q \approx 1{,}26$ МэВ.

4.3.16. Найти отношение энергии покоя электрона к энергия ионизации атома водорода. Атом до ионизации считать находящимся в основном энергетическом состоянии.

Ответ: $n = 2\left(\dfrac{2\varepsilon_0 hc}{e^2}\right)^2 \approx 3{,}8\cdot10^4$.

4.3.17. Найти дефект массы ядра атома $^3_2\mathrm{He}$, учитывая наличие в атоме гелия двух электронов. Относительные атомные массы атома $^3_2\mathrm{He}$ и электрона равны 3,01602 а.е.м. и 0,00055 а.е.м. соответственно. Ответ выразить в а.е.м. и округлить до тысячных долей.

Ответ: $\Delta m \approx 0{,}008$ а.е.м.

4.3.18. При попадании α-частицы в ядро бора $^{11}_5\mathrm{B}$ происходит реакция, в результате которой образуется некоторый элемент и вылетает нейтрон. Найти зарядовое и массовое числа получающегося элемента.

Ответ: $Z = 7$, $M = 14$, то есть получающийся элемент – это азот $^{14}_7\mathrm{N}$.

4.3.19. Определить заряд Z и массовое число M ядра элемента, получающегося из урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ в результате двух α-превращений и двух β-превращений.

Ответ: $Z = 90$, $M = 230$, то есть получающийся элемент – изотоп тория $^{230}_{90}\mathrm{Th}$.

4.3.20. При столкновении ядра плутония $^{242}_{94}\mathrm{Pu}$ с ядром неона $^{22}_{10}\mathrm{Ne}$ может образоваться ядро изотопа курчатовия Ku. Написать уравнение этой ядерной реакции, если помимо ядра курчатовия в ее ходе образуется еще 4 нейтрона.

Ответ: $^{242}_{94}\mathrm{Pu} + ^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow ^{260}_{104}\mathrm{Ku} + 4\,^1_0\mathrm{n}$.

4.3.21. При попадании γ-кванта в ядро алюминия $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ может образоваться ядро изотопа магния $^{26}_{12}\mathrm{Mg}$. Написать уравнение этой ядерной реакции и определить, какая в ее ходе образуется элементарная частица.

Ответ: $^{27}_{13}\mathrm{Al} + \gamma \rightarrow ^{26}_{12}\mathrm{Mg} + ^1_1\mathrm{H}$, образуется протон.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение высокого итогового балла за экзаменационную работу ЕГЭ и победы в олимпиадах требуют от учеников высокого уровня подготовки по избранным предметам, широкого кругозора, глубокого понимания теоретического и справочного материала, уверенного владения приемами и методами решения задач и навыками выполнения творческих заданий. Авторы надеются, что данное пособие помогло читателям в совершенствовании приемов и методов решения физических задач, а также в углублении понимания различных физических законов. Однако не следует останавливаться на достигнутом. Навыки решения физических задач необходимо постоянно совершенствовать. Для этой цели можно и нужно использовать любые доступные задачники и пособия, систематическая работа с которыми придаст уверенность в своих силах и предоставит возможность справиться с заданиями ЕГЭ и с задачами олимпиад на «отлично». Авторы желают учащимся успехов в изучении физики и других наук и надеются на возможную скорую встречу в университетских аудиториях.

ЛИТЕРАТУРА

Тематические тесты для подготовки к итоговой аттестации и ЕГЭ. Физика / О. Ф. Кабардин, Л. В. Болотник, М.: Баласс, Изд. Дом РАО, 2005.

ЕГЭ – 2007: Физика. Сборник заданий / Г. Г. Никифоров, В. А. Орлов, Н. К. Ханнанов, М.: Просвещение, Эксмо, 2007.

Готовимся к ЕГЭ. Тесты по физике для контроля и самопроверки / В. А. Орлов. М.: Илекса, 2008.

Курс школьной физики. Пособие по подготовке к ЕГЭ / А. И. Черноуцан, М.: Физматлит, 2008.

ЕГЭ – 2008. Физика. Тренировочные задания / А. А. Фадеева. – М.: Эксмо, 2008.

ЕГЭ – 2009. Физика: сборник экзаменационных заданий. Федеральный банк экзаменационных материалов / ФИПИ. Авторы составители: М. Ю. Демидова, И. И. Нурминский – М.: Эксмо, 2008.

Единый государственный экзамен 2009. Физика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ. Авторы составители: М. Ю. Демидова, Г. Г. Никифоров, В. А. Орлов, Н. К. Ханнанов – М.: Интеллект-Центр, 2009.

Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ. 2009. Физика / ФИПИ. Авторы составители: А. В. Берков, В. А. Грибов – М.: Астрель, 2009.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Основные константы

ускорение свободного падения на Земле	$g = 10$ м/с^2
гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
постоянная Авогадро	$N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k_{эл} = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2
электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
постоянная Фарадея	$F = eN_A = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль
постоянная Планка	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
постоянная Ридберга для водорода	$R_{\text{H}} = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
энергия ионизации атома водорода	$(E_i)_{\text{H}} = 13{,}56$ эВ
масса электрона	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $= 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
масса протона	$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}00728$ а.е.м.
масса нейтрона	$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}00866$ а.е.м.

Дополнительные константы

средний радиус Земли	$R_З = 6370$ км
масса Земли	$M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг
нормальное атмосферное давление	$p_0 = 10^5$ Па = 760 мм рт. ст.
абсолютный ноль термодинамической температуры	0 К = –273 °С
удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
энергия покоя электрона	$m_e c^2 = 8{,}187 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,511 МэВ
энергия покоя протона	$m_p c^2 = 1{,}503 \cdot 10^{-10}$ Дж = 938,26 МэВ
энергия покоя нейтрона	$m_n c^2 = 1{,}505 \cdot 10^{-10}$ Дж = 939,55 МэВ

Соотношения между некоторыми единицами измерения

радиан	1 рад ≈ 57,3°
литр	1 литр = 10^{-3} $м^3$ = 10^3 $см^3$
атмосфера	1 атм. ≈ 10^5 Па
миллиметр ртутного столба	1 мм рт. ст. ≈ 133 Па
диоптрия	1 дптр. = 1 $м^{-1}$
ангстрем	1 Å = 10^{-10} м
атомная единица массы	1 а.е.м. ≈ $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
(1 а.е.м.)$\cdot c^2$	$150 \cdot 10^{-12}$ Дж ≈ 931,5 МэВ
электронвольт	1 эВ ≈ $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Молярные массы некоторых газов

Газ	Молярная масса, кг/моль
молекулярный водород H_2	0,002
гелий He	0,004
водяной пар	0,018
неон Ne	0,020
молекулярный азот N_2	0,028
атмосферный воздух	0,029
молекулярный кислород O_2	0,032
аргон Ar	0,040
углекислый газ CO_2	0,044

Относительные атомные массы некоторых изотопов

Изотоп	Масса нейтрального атома, а.е.м.	Изотоп	Масса нейтрального атома, а.е.м.
^1_1H	1,00783	^4_2He	4,00260
^2_1H	2,01410	^6_3Li	6,01513
^3_1H	3,01605	^7_3Li	7,01601
^3_2He	3,01602	$^{10}_5B$	10,01294

Примечание: для нахождения относительной атомной массы ядра необходимо вычесть из приведенной в таблице величины суммарную массу электронов в данном атоме.

Кратные и дольные десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9	санти	с	10^{-2}
мега	М	10^6	милли	м	10^{-3}
кило	к	10^3	микро	мк	10^{-6}
гекто	г	10^2	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}	пико	п	10^{-12}

Некоторые полезные числа

$$\pi \approx 3{,}14159; \quad \pi^2 \approx 9{,}87; \quad \ln 2 \approx 0{,}693; \quad \lg 2 \approx 0{,}301;$$

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414; \quad \sqrt{3} \approx 1{,}732; \quad \sqrt{5} \approx 2{,}236; \quad \sqrt{7} \approx 2{,}646;$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866; \quad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707;$$

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577; \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \approx 1{,}732.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отпечатано с готовых диапозитивов в филиале ГУП МО «КТ» «Воскресенская типография»
140200, г. Воскресенск Московской области, ул. Вокзальная, д. 30
E-mail: vosprint@mail.ru тел.: 8 (49644) 2-45-42 Заказ № 2824